ოთხშაბათი, 10 აპრილი, 2019 წელი

ამოცანა N4. ვთქვათ, ABC სამკუთხედში წერტილი I მასში ჩახაზული წრეწირის ცენტრია. წრეწირი რომელიც გადის B წერტილზე და ეხება AI-ს I წერტილში, AB გვერდს კვეთს P წერტილზე, ხოლო წრეწირი რომელიც გადის C წერტილზე და ეხება AI-ს I წერტილში, AC გვერდს კვეთს Q წერტილზე. დაამტკიცეთ, რომ PQ ეხება ABC სამკუთხედში ჩახაზულ წრეწირს.

ამოცანა N5. ვთქვათ, $n \geq 2$ და $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ნატურალური რიცხვებია. დაამტკიცეთ, რომ არსებობს $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ნატურალური რიცხვები, რომლებიც აკმაყოფილებენ შემდეგ სამ პირობას.

(ა) $a_i \leq b_i$, ნებისმიერი $i = 1,2, \ldots, n$-თვის.

(ბ) $b_1, b_2, \ldots, b_n$ რიცხვები n-ზე გაყოფისას გვაძლევენ წყვილ-წყვილად განსხვავებულ ნაშთებს.

(გ) $b_1 + b_2 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\rfloor\right)$

($\lfloor x \rfloor$ აღნიშნავს x ნამდვილი რიცხვის მთელ ნაწილს, ანუ ისეთ უდიდეს მთელ რიცხვს რომელიც არ აღემატება x-სს.)

ამოცანა N6. ალინამ წრეწირზე გაავლო 2019 ცალი ქორდა, რომელთა ბოლოები განსხვავებული წერტილებია. მან წერტილი გაამუქა თუ იგი:

(i) წარმოადგენს ქორდების 4038 ბოლოდან რომელიმეს, ან

(ii) ორი ან მეტი ქორდის გადაკვეთის წერტილს.

ალინამ ყველა გამუქებულ წერტილს დააწერა რიცხვი შემდეგი წესით: (i) კრიტერიუმის 4038 წერტილიდან 2019 ცალს დააწერა რიცხვი 1 , ხოლო დანარჩენებს 0. (ii) კრიტერიუმის თითოეულ წერტილს დააწერა ნებისმიერი მთელი რიცხვი (არა აუცილებლად დადებითი). თითოეულ, ქორდაზე ალინამ განიხილა ყველა მონაკვეთი რომელთა ბოლოები წარმოადგენენ ამ ქორდაზე მონიშნულ რომელიმე ორ მეზობელ წერტილს. (ქორდაზე რომელიც შეიცავს k ცალ მონიშნულ წერტილს ასეთი $k-1$ ცალი მონაკვეთი იქნება.) თითოეულ ასეთ მონაკვეთს მან დააწერა ორი განსხვავებული ფერის რიცხვი: ყვითელი, რომელიც უდრის ამ მონაკვეთის ბოლოებში დაწერილ რიცხვთა ჯამს და ლურჯი რომელიც უდრის ამავე მონაკვეთის ბოლოებში დაწერილი რიცხვების სხვაობის აბსოლუტურ სიდიდეს. შედეგად ალინამ, აღმოაჩინა რომ მიღებულ $N+1$ ცალ ყვითელ რიცხვთა მნიშვნელობები იყო: $0, 1, 2, \ldots, N$. დაამტკიცეთ, რომ ერთი ლურჯი რიცხვი მაინც იქნება სამის ჯერადი.

(ქორდა ეწოდება მონაკვეთს, რომელიც წრეწირის ორ განსხვავებულ წერტილს აერთებს)

სამუშაო დრო 4 საათი და 30 წუთი

თითოეული ამოცანა ფასდება 7 ქულით