Onsdag d. 10. april 2019

Opgave 4. Lad ABC være en trekant hvor I er centrum for den indskrevne cirkel. Cirklen gennem B som tangerer AI i punktet I, skærer siden AB i endnu et punkt P. Cirklen gennem C som tangerer AI i punktet I, skærer siden AC i endnu et punkt Q. Vis at linjen PQ er tangent til den indskrevne cirkel til ABC.

Opgave 5. Lad $n \geq 2$ være et helt tal, og lad $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være positive hele tal. Vis at der findes positive hele tal $b_1, b_2, \ldots, b_n$ som opfylder følgende tre betingelser:

(A) $a_i \leq b_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) resterne af $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ved division med n er parvis forskellige, og

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Her betegner $\lfloor x \rfloor$ heltalsdelen af det reelle tal x, dvs. det største hele tal som ikke er større end x.)

Opgave 6. Alina tegner 2019 korder i en cirkel sådan at alle endepunkterne er forskellige. Et punkt kaldes *markeret* hvis det enten er

(i) et af de 4038 endepunkter af en korde, eller

(ii) en skæring mellem mindst to korder.

Alina knytter et tal til hvert markeret punkt. Af de 4038 markerede punkter fra (i) knytter Alina tallet 0 til 2019 punkter og tallet 1 til de resterende 2019 punkter. Til hvert punkt fra (ii) knytter hun et vilkårligt helt tal (der ikke nødvendigvis er positivt).

For hver korde betragter Alina linjestykker som forbinder to på hinanden følgende nabopunkter på korden. (En korde med k markerede punkter har $k - 1$ sådanne linjestykker). Ved hvert sådant linjestykke skriver hun med gult summen af de to tal knyttet til dets to endepunkter, og med blåt den numeriske værdi af forskellen på de to tal.

Alina ser at de $N + 1$ gule tal er tallene $0, 1, \ldots, N$ netop en gang hver. Vis at mindst et af de blå tal er et multiplum af 3.

(En *korde* er et linjestykke som forbinder to forskellige punkter på en cirkel.)