European Girls' Mathematical Olympiad
Kyiv, Ukraine 2019

Language: **Czech**

Day: **2**

Středa, 10. dubna 2019

Úloha 4. Nechť I je střed kružnice ω vepsané trojúhelníku ABC. Kružnice procházející bodem B, která sa dotýká AI v bodě I, protíná stranu AB v bodě P ($P \neq B$). Analogicky, kružnice procházející bodem C, která se dotýká AI v bodě I, protína stranu AC v bodě Q ($Q \neq C$). Dokažte, že přímka PQ je tečnou kružnice ω.

Úloha 5. Nechť $n \geq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ splňující následující tři podmínky:

(A) $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) zbytky po dělení čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ číslem n jsou po dvou různé; a

(C) $b_1 + \ldots + b_n \leq n \left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x, což je největší celé číslo nepřevyšující x.)

Úloha 6. Alena nakreslila na kružnici 2019 tětiv s navzájem různými krajními body. Bod nazveme *označený*, právě když jde o

(i) jeden z 4038 krajních bodů těchto tětiv; nebo

(ii) průsečík aspoň dvou z těchto tětiv.

Alena potom každý z označených bodů číselně ohodnotila. Ze všech 4038 krajních bodů splňujících (i) ohodnotila některých 2019 bodů číslem 0 a zbývajících 2019 bodů číslem 1. Následně ohodnotila všechny body splňující (ii) libovolným celým číslem (ne nutně kladným).

Na každé tětivě uvažovala úsečky spojující po sobě jdoucí označené body. (Tětiva s k označenými body obsahuje $k-1$ takových úseček.) Dále ohodnotila každou takovou úsečku dvěma čísly, z nichž jedno je žluté a druhé modré, přičemž žlutá čísla představují součet číselných ohodnocení koncových bodů na ohodnocované úsečce a modrá čísla absolutní hodnotu jejich rozdílu.

Následně Alena zjistila, že mezi všemi $N+1$ žlutými čísly se každé z čísel $0, 1, \ldots, N$ vyskytuje právě jednou. Dokažte, že aspoň jedno modré číslo je násobkem 3.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnocena nejvýše 7 body.