



E mërkurë, 10 Prill, 2019

Problemi 4. Në trekëndëshin ABC shënohet me I qendra e rrethit të brendashkruar këtij trekëndëshi. Rrethi që kalon në pikën B dhe është tangjent me AI në pikën I , pret përsëri brinjën AB në pikën P . Rrethi që kalon në pikën C dhe është tangjent me AI në pikën I , pret përsëri brinjën AC në pikën Q . Vërtetoni se PQ është tangjente me rrethin e brendashkruar trekëndëshit ABC .

Problemi 5. Jepet numri i plotë $n \geq 2$, dhe numrat e plotë pozitivë a_1, a_2, \dots, a_n . Tregoni se gjenden numrat e plotë pozitivë b_1, b_2, \dots, b_n që kënaqin kushtet e mëposhtme:

(A) $a_i \leq b_i$ ku $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) mbetjet e b_1, b_2, \dots, b_n në pjesëtimin me n janë çdo dy të ndryshme; dhe

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Në këtë rast, $\lfloor x \rfloor$ është pjesa e plotë e numrit real x , pra, numri i plotë më i madh që nuk e kalon x .)

Problemi 6. Në një rreth, Alina vizaton 2019 korda, pikat e skajeve të të cilave janë të gjitha të ndryshme. Pikat quhen *të markuara* në qoftë se ato janë ose

(i) një nga 4038 pikat e skajeve të një korde; ose

(ii) një pikë prerjeje e të paktën dy kordave.

Alina i vendos një numër secilës pikë të markuar. Nga 4038 pikat që kënaqin kushtin (i), Alina vendos në 2019 pika një 0 dhe në 2019 pikat e tjera një 1. Ajo i vendos secilës pikë që kënaq kushtin (ii) një numër të plotë çfarëdo (jo domosdoshmërisht pozitiv).

Përgjatë secilës kordë, Alina merr në shqyrtim segmentet që bashkojnë dy pika të markuara të njëpasnjëshme. (Një kordë me k pika të markuara ka $k-1$ segmente të tillë.) Në çdo segment të tillë ajo shkruan me të verdhë shumën e numrave që janë vendosur në pikat e skajeve të tij dhe me blu vlerën absolute të diferencës së po këtyre dy numrave.

Në fund Alina zbulon se $N+1$ numrat me ngjyrë të verdhë marrin të gjitha vlerat $0, 1, \dots, N$ saktësisht nga një herë. Tregoni se të paktën një prej numrave me ngjyrë blu është shumëfish i 3-it.

(Një *kordë* është një segment drejtëze që bashkon dy pika të ndryshme të një rrethi.)