*Середа, 10 квітня, 2019*

**Задача 4.** Нехай трикутник $ABC$ має інцентр в точці $I$. Коло, що проходить через точку $B$ та дотикається до $AI$ в точці $I$ перетинає сторону $AB$ вдруге в точці $P$. Коло, що проходить через точку $C$ та дотикається до $AI$ в точці $I$ перетинає сторону $AC$ вдруге в точці $Q$. Доведіть, що $PQ$ є дотичною до вписаного кола трикутника $ABC$.

**Задача 5.** Нехай $n \geq 2$ є цілим, та нехай $a_1, a_2, \ldots, a_n$ є цілими додатніми числами. Доведіть, що існують додатні цілі числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, що задовольняють наступним трьом умовам:

(А) $a_i \leq b_i$ для $i = 1, 2, \ldots, n$;

(Б) остачі чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ при діленні на $n$ є попарно різними; та

(В) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Тут $\lfloor x \rfloor$ позначає цілу частину дійсного числа $x$, тобто, найбільше ціле число, що не перевищує $x$.)

**Задача 6.** У колі Аліна провела 2019 хорд з попарно різними кінцями. Назвемо точку *особливою*, якщо для неї виконується одна з умов

(i) вона є однією з 4038 кінців проведених хорд; або

(ii) вона є точкою перетину щонайменше двох хорд.

Біля кожної *особливої* точки Аліна записує число. А саме для 4038 точок, що задовольняють умову (i): Аліна біля якихось 2019 точок записує число 0, а біля інших 2019 точок записує 1. А для точок, що задовольняють умову (ii) записує будь-яке ціле число(не обов'язково додатнє).

На кожній хорді, Аліна розглядає відрізки, що з'єднують дві сусідні *особливі* точки. (Хорда з $k$ *особливими* точками мають $k-1$ таких відрізків.) Для кожного такого відрізка вона записує жовтим кольором суму чисел, що записані на кінцях цього відрізка, та синім кольором модуль їх різниці.

Аліна помітила, що $N+1$ порахованих жовтих чисел це вточності числа $0, 1, \ldots, N$. Доведіть, що хоча б одне записане синім кольором число ділиться на 3.

(*Хорда* це відрізок, що з'єднує дві різні точки на колі.)



Час: 4 години та 30 хвилин

Кожна задача оцінюється в 7 балів