

Çarşamba, 10 Nisan, 2019

**Soru 4.**  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberinin merkezi  $I$  olsun.  $AI$  doğrusuna  $I$  noktasında teğet olan ve  $B$  noktasından geçen çember  $[AB]$  kenarını ikinci kez  $P$  noktasında kesiyor.  $AI$  doğrusuna  $I$  noktasında teğet olan ve  $C$  noktasından geçen çember  $[AC]$  kenarını ikinci kez  $Q$  noktasında kesiyor.  $PQ$  nün  $ABC$  üçgeninin içteğet çemberine teğet olduğunu gösteriniz.

**Soru 5.**  $n \geq 2$  bir pozitif tam sayı olmak üzere,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  verilmiş pozitif tam sayılar olsun. Aşağıdaki üç koşulu sağlayan  $b_1, b_2, \dots, b_n$  pozitif tam sayılarının bulunduğunu gösteriniz:

(A) Her  $i = 1, 2, \dots, n$  için  $a_i \leq b_i$ ;

(B)  $b_1, b_2, \dots, b_n$  sayılarının  $n$  ile bölümünden kalanlar birbirinden farklıdır; ve

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$ .

(Burada  $x$  gerçel sayısının tam değeri  $\lfloor x \rfloor$  olarak gösterilmiştir, bu sayı  $x$  den büyük olmayan en büyük tam sayıdır.)

**Soru 6.** Aslı bir çemberin 2019 kirişini, herhangi iki kirişin uç noktaları birbirinden farklı olacak şekilde çiziyor. Bir noktanın *işaretli* olması için onun

(i) kirişlerin 4038 uç noktalarından biri; ya da

(ii) en az iki kirişin kesişim noktası

olması gerekiyor.

Aslı bütün işaretli noktaları etiketliyor. Aslı (i) koşulunu sağlayan 4038 noktadan 2019 tanesini 0, kalan 2019 tanesini 1 ile etiketliyor. Aslı (ii) koşulunu sağlayan her noktayı bir tam sayı ile etiketliyor (bu sayılar pozitif olma zorunda değil).

Aslı her kiriş için bu kirişin üstünde bulunan herhangi iki ardışık işaretli noktayı birleştiren tüm doğru parçalarını inceliyor. (Üstünde  $k$  işaretli nokta bulunan kirişin üzerinde bu tür tanımlanmış  $k - 1$  doğru parçası bulunuyor.) Aslı bu doğru parçalarından her birini, bu doğru parçasının iki uç noktasının toplamına eşit olan sayı ile sarı renkte ve bu doğru parçasının iki uç noktasının farkının mutlak değerine eşit olan sayı ile mavi renkte etiketliyor.

Aslı yazılan sarı etiket sayısının  $N + 1$  olduğunu ve  $0, 1, \dots, N$  sayılarından her birine eşit olan tam olarak bir sarı etiketin bulunduğunu gözlemliyor. Buna göre, en az bir mavi etiketin 3 ün bir katı olduğunu gösteriniz.

(*Kiriş* çemberin iki farklı noktasını birleştiren doğru parçasıdır.)