

Miércoles, 10 de abril de 2019

**Problema 4.** Sea  $ABC$  un triángulo con incentro  $I$ . La circunferencia que pasa por  $B$  y es tangente a la recta  $AI$  en el punto  $I$  corta al lado  $AB$  por segunda vez en  $P$ . La circunferencia que pasa por  $C$  y es tangente a la recta  $AI$  en el punto  $I$  corta al lado  $AC$  por segunda vez en  $Q$ . Muestre que  $PQ$  es tangente a la circunferencia inscrita del triángulo  $ABC$ .

**Problema 5.** Sea  $n \geq 2$  un número entero, y sean  $a_1, a_2, \dots, a_n$  enteros positivos. Muestre que existen enteros positivos  $b_1, b_2, \dots, b_n$  que cumplen las siguientes tres condiciones:

(A)  $a_i \leq b_i$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(B) Los residuos (o restos) de  $b_1, b_2, \dots, b_n$  al dividirlos entre  $n$  son todos diferentes; y

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$ .

*Nota:* Denotamos por  $\lfloor x \rfloor$  a la parte entera del número real  $x$ , es decir, al mayor entero que es menor o igual a  $x$ .

**Problema 6.** Alina traza 2019 cuerdas en una circunferencia. Los puntos extremos de éstas son todos diferentes. Un punto se considera *marcado* si es de uno de los siguientes tipos:

(i) uno de los 4038 puntos extremos de las cuerdas; o

(ii) un punto de intersección de al menos dos de las cuerdas.

Alina etiqueta con un número cada punto marcado. De los 4038 puntos del tipo (i), 2019 son etiquetados con un 0 y los otros 2019 puntos con un 1. Ella etiqueta cada punto del tipo (ii) con un entero arbitrario, no necesariamente positivo.

En cada cuerda, Alina considera todos los segmentos entre puntos marcados consecutivos (si una cuerda tiene  $k$  puntos marcados, entonces tiene  $k - 1$  de estos segmentos). Sobre cada uno de estos segmentos, Alina escribe dos números: en amarillo escribe la suma de las etiquetas de los puntos extremos del segmento, mientras que en azul escribe el valor absoluto de su diferencia.

Alina se da cuenta que los  $N + 1$  números amarillos son exactamente los números  $0, 1, \dots, N$ . Muestre que al menos uno de los números azules es múltiplo de tres.

*Nota:* Una *cuerda* es el segmento de recta que une dos puntos distintos en una circunferencia.