Sreda, 10. april 2019

Naloga 4. Naj bo ABC trikotnik s središčem včrtane krožnice v I. Krožnica skozi B tangentna na AI v I seka stranico AB ponovno v P. Krožnica skozi C tangentna na AI v I seka stranico AC ponovno v Q. Dokaži, da je PQ tangentna na krožnico včrtano trikotniku ABC.

Naloga 5. Naj bo $n \geq 2$ naravno število in naj bodo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ naravna števila. Pokaži, da obstajajo naravna števila $b_1, b_2, \ldots, b_n$, ki zadoščajo naslednjim trem pogojem:

(A) $a_i \leq b_i$ za $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) ostanki števil $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pri deljenju z n so paroma različni in

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

(V tem primeru $\lfloor x \rfloor$ označuje celi del realnega števila x, to je največje celo število, ki ni večje od x.)

Naloga 6. Alina nariše na krožnici 2019 tetiv, katerih krajišča so vsa različna. Točko imenujemo *zaznamovana*, če je

(i) ena od 4038 krajišč tetiv ali

(ii) presečišče vsaj dveh tetiv.

Alina označi vsako zaznamovano točko. Izmed 4038 točk, ki ustrezajo pogoju (i), Alina označi 2019 točk z 0 in ostalih 2019 točk z 1. Vsako točko, ki ustreza pogoju (ii) označi s poljubnim celim številom (ne nujno pozitivnim).

Na vsaki tetivi Alina pogleda daljice, ki povezujejo dve zaporedni zaznamovani točki. (Tetiva s k zaznamovanimi točkami ima $k-1$ takih daljic.) Na vsaki taki daljici označi z rumeno barvo vsoto oznak obeh krajišč in z modro absolutno vrednost razlike oznak obeh krajišč.

Alina ugotovi, da je rumenih oznak $N+1$ in zavzamejo vsako izmed vrednosi $0, 1, \ldots, N$ natanko enkrat. Dokaži, da je vsaj ena modra oznaka večkrtanik števila 3.

(*Teitva* je daljica, ki povezuje dve različni točki na krožnici.)

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk