Streda, 10. apríla 2019

Úloha 4. Nech I je stred kružnice ω vpísanej trojuholníku ABC. Kružnica prechádzajúca bodom B, ktorá sa dotýka AI v bode I, pretína stranu AB v bode P ($P \neq B$). Analogicky, kružnica prechádzajúca bodom C, ktorá sa dotýka AI v bode I, pretína stranu AC v bode Q ($Q \neq C$). Dokážte, že priamka PQ je dotyčnica kružnice ω.

Úloha 5. Nech $n \geq 2$ je celé číslo a $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sú kladné celé čísla. Dokážte, že existujú kladné celé čísla $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spĺňajúce nasledujúce tri podmienky:

(A) $a_i \leq b_i$ pre $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) zvyšky po delení čísel $b_1, b_2, \ldots, b_n$ číslom n sú po dvoch rôzne; a

(C) $b_1 + \ldots + b_n \leq n \left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolnú celú časť reálneho čísla x, čo je najväčšie celé číslo neprevyšujúce x.)

Úloha 6. Alena nakreslila na kružnici 2019 tetív s navzájom rôznymi krajnými bodmi. Bod nazveme *označený*, práve keď ide o

(i) jeden z 4038 krajných bodov týchto tetív; alebo

(ii) priesečník aspoň dvoch z týchto tetív.

Alena potom každý z označených bodov číselne ohodnotí. Zo všetkých 4038 krajných bodov spĺňajúcich (i) ohodnotí nejakých 2019 bodov číslom 0 a zvyšných 2019 bodov číslom 1. Následne ohodnotí všetky body spĺňajúce (ii) ľubovoľným celým číslom (nie nutne kladným).

Pozdĺž každej tetivy uvažuje úsečky spájajúce po sebe idúce označené body. (Tetiva s k označenými bodmi obsahuje $k-1$ takýchto úsečiek.) Ďalej ohodnotí každú takúto úsečku dvoma číslami, z ktorých jedno je žlté a druhé modré, pričom žlté čísla predstavujú súčet číselných ohodnotení koncových bodov na ohodnocovanej úsečke a modré čísla absolútnu hodnotu ich rozdielu.

Následne Alena zistila, že medzi všetkými $N+1$ žltými číslami sa každé z čísel $0, 1, \ldots, N$ vyskytuje práve raz. Dokážte, že aspoň jedno modré číslo je násobkom 3.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.