

sreda, 10. april 2019.

Zadatak 4. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC . Kružnica koja prolazi kroz tačku B i tangenta je na AI u I seče stranicu AB ponovo u P . Kružnica koja prolazi kroz tačku C i tangenta je na AI u I seče stranicu AC ponovo u Q . Dokazati da je PQ tangenta na upisanu kružnicu trougla ABC .

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $n \geq 2$ i prirodni brojevi a_1, \dots, a_n . Dokazati da postoje prirodni brojevi b_1, \dots, b_n koji zadovoljavaju sledeće tri osobine:

(A) $a_i \leq b_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) ostaci pri deljenju brojeva b_1, \dots, b_n sa n su po parovima različiti; i

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Ovde $\lfloor x \rfloor$ označava cio dio realnog broja x , tj. to je najveći celi broj koji nije veći od x .)

Zadatak 6. Danijel povlači 2019 tetiva u kružnici tako da su sve krajnje tačke tetiva različite. Tačka se naziva *specijalnom* ako je ili

- i) jedna od 4038 krajnjih tačaka tetiva; ili
- ii) tačka preseka barem dve tetive.

Danijel numeriše svaku specijalnu tačku. Od 4038 tačaka koje zadovoljavaju uvet (i), Danijel numeriše njih 2019 sa 0, a preostalih 2019 sa 1. Također numeriše svaku tačku koja zadovoljava uvet (ii) sa proizvoljnim celim brojem (ne nužno pozitivnim).

Duž svake tetive, Danijel razmatra segmente koji spajaju dve susedne specijalne tačke. (Tetiva sa k specijalnih tačaka ima $k - 1$ takvih segmenata). On numeriše svaki takav segment sa dve boje; žutom bojom napiše sumu brojeva kojima su numerisane dve krajnje tačke tog segmenta, i plavom bojom napiše apsolutnu vrednost razlike ta dva broja.

Danijel uvidi da $N + 1$ žutih brojeva uzima svaku od vrednosti $0, 1, \dots, N$ tačno jednom. Dokazati da je barem jedan plavi broj deljiv sa 3.

(Tetiva je duž koja spaja dve različite tačke na kružnici.)

Language: Serbian (BIH)

Vreme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vredi 7 poena