

sreda, 10.4.2019.

Zadatak 4. Neka je ABC trougao, i neka je I centar njegove upisane kružnice. Kružnica kroz tačku B koja je tangentna na pravu AI u tački I ponovo seče stranicu AB u tački P . Kružnica kroz tačku C koja je tangentna na pravu AI u tački I ponovo seče stranicu AC u tački Q . Dokazati da je prava PQ tangenta kružnice upisane u trougao ABC .

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $n \geq 2$, kao i prirodni brojevi a_1, a_2, \dots, a_n . Dokazati da postoje prirodni brojevi b_1, b_2, \dots, b_n koji zadovoljavaju sledeća tri uslova:

(A) $a_i \leq b_i$, za $i = 1, 2, \dots, n$,

(B) ostaci pri deljenju brojeva b_1, b_2, \dots, b_n sa n su svi različiti, i

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Sa $\lfloor x \rfloor$ označavamo ceo deo realnog broja x , odnosno najveći ceo broj koji nije veći od x .)

Zadatak 6. Alina na kružnici crta 2019 tetiva čije su krajnje tačke sve različite. Tačka je *značajna* ako

(i) je jedna od 4038 krajnjih tačaka tetiva, ili

(ii) je presečna tačka dve ili više tetiva.

Alina zatim označava brojem svaku značajnu tačku. Od 4038 tačaka koje zadovoljavaju uslov (i), Alina označava 2019 tačaka brojem 0, a preostalih 2019 tačaka brojem 1. Svaku tačku koja zadovoljava uslov (ii) ona označava proizvoljnim celim brojem (koji ne mora biti pozitivan).

Potom, Alina posmatra duži koje povezuju susedne značajne tačke duž svake tetive. (Tetiva sa k značajnih tačaka ima tačno $k - 1$ takvih duži.) Na svakoj takvoj duži ona piše žutom bojom zbir brojeva kojima su označene krajnje tačke te duži, a plavom bojom apsolutnu vrednost razlike tih brojeva.

Konačno, Alina primećuje da ima ukupno $N + 1$ brojeva napisanih žutom bojom, i da se među njima svaka od vrednosti $0, 1, \dots, N$ pojavljuje tačno jednom. Dokazati da je bar jedan broj napisan plavom bojom umnožak broja 3.

(*Tetiva* je duž koja spaja dve različite tačke na kružnici.)