Среда, 10 апреля 2019 г.

Задача 4. Пусть ABC — треугольник, а I — центр его вписанной окружности. Окружность, проходящая через B и касающаяся AI в точке I, пересекает сторону AB повторно в точке P. Окружность, проходящая через C и касающаяся AI в точке I, пересекает сторону AC повторно в точке Q. Докажите, что PQ касается вписанной окружности треугольника ABC.

Задача 5. Пусть $n \geq 2$ — целое число, и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные целые числа. Докажите, что существуют положительные целые числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, удовлетворяющие следующим трём условиям:

(A) $a_i \leq b_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) остатки от деления чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на n попарно различны; и

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left[\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right] \right)$.

(Здесь через $[x]$ обозначена целая часть вещественного числа x, то есть, наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Задача 6. Алина рисует в окружности 2019 хорд, все концы которых различны. Точка считается *отмеченной*, если она либо

(i) одна из 4038 концов хорд; либо

(ii) точка пересечения по крайней мере двух хорд.

Каждой отмеченной точке Алина ставит в соответствие число. Из 4038 точек, удовлетворяющих критерию (i), Алина 2019 точкам ставит в соответствие число 0, а остальным 2019 точкам — число 1. Каждой точке, удовлетворяющей критерию (ii) она ставит в соответствие произвольное целое число (не обязательно положительное).

Вместе с каждой хордой Алина рассматривает отрезки, соединяющие последовательные отмеченные точки. (На хорде с k отмеченными точками есть $k-1$ такой отрезок.) Рядом с каждым таким отрезком она записывает жёлтым сумму чисел, соответствующих его концам, и синим — модуль их разности.

Алина обнаружила, что есть всего $N+1$ чисел, записанным жёлтым, и они принимают каждое значение $0, 1, \ldots, N$ ровно один раз. Докажите, что по крайней мере одно число, записанное синим, делится на 3.

(*Хорда* — это отрезок, соединяющий две различные точки окружности.)