

Miercuri, 10 Aprilie, 2019

Problema 4. Fie ABC un triunghi și I centrul cercului său înscris. Cercul care trece prin B și este tangent la AI în I taie din nou latura AB în P . Cercul care trece prin C și este tangent la AI în I taie din nou latura AC în Q . Demonstrați că PQ este tangentă la cercul înscris în triunghiul ABC .

Problema 5. Fie $n \geq 2$ un număr întreg și fie a_1, a_2, \dots, a_n numere întregi strict pozitive. Demonstrați că există numerele întregi b_1, b_2, \dots, b_n care satisfac următoarele trei condiții:

(A) $a_i \leq b_i$ pentru $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) resturile la împărțirea cu n ale numerelor b_1, b_2, \dots, b_n sunt diferite două câte două;

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Aici $\lfloor x \rfloor$ desemnează partea întreagă a numărului real x , adică cel mai mare număr întreg care nu-l depășește pe x .)

Problema 6. Alina desenează 2019 coarde ale unui cerc, astfel încât capetele lor să fie diferite două câte două. Un punct se consideră *marcat* dacă

(i) este unul dintre cele 4038 capete ale coardelor; sau

(ii) este un punct de intersecție a cel puțin două coarde.

Alina pune câte un număr în dreptul fiecărui punct marcat. Dintre cele 4038 de puncte de tipul (i), Alina pune 0 în dreptul a 2019 puncte și 1 în dreptul celorlalte 2019 puncte. Ea pune apoi în dreptul fiecărui punct de tipul (ii) câte un număr întreg arbitrar (nu neapărat pozitiv).

De-a lungul fiecărei coarde, Alina consideră segmentele care unesc două puncte marcate consecutive. (O coardă care are k puncte marcate are $k - 1$ astfel de segmente.) Ea scrie în dreptul fiecărui astfel de segment, cu galben, suma numerelor puse la capetele sale, și cu albastru, valoarea absolută a diferenței lor.

Alina descoperă că cele $N + 1$ numere scrise cu galben sunt $0, 1, \dots, N$, fiecare exact câte o dată. Arătați că cel puțin un număr scris cu albastru este multiplu de 3.

(O coardă este un segment care unește două puncte ale cercului.)