

Quarta-feira, 10 de abril de 2019

Problema 4. Seja ABC um triângulo com incentro I . A circunferência que passa por B e é tangente a AI no ponto I intersecta o lado AB novamente no ponto P . A circunferência que passa por C e é tangente a AI no ponto I intersecta o lado AC novamente em Q . Prove que PQ é tangente ao incírculo de ABC .

Problema 5. Seja $n \geq 2$ um inteiro, e sejam a_1, a_2, \dots, a_n inteiros positivos. Mostre que existem inteiros positivos b_1, b_2, \dots, b_n que satisfazem as seguintes três condições:

(A) $a_i \leq b_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) os restos de b_1, b_2, \dots, b_n na divisão por n são distintos dois a dois; e

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

($\lfloor x \rfloor$ denota a parte inteira do número real x , isto é, o maior inteiro que é menor ou igual a x .)

Problema 6. Alina traça 2019 cordas em uma circunferência. Os pontos extremos dessas cordas são todos distintos. Um ponto é considerado *marcado* se ele é de um dos seguintes tipos:

- (i) um dos 4038 pontos extremos das cordas; ou
- (ii) um ponto de interseção de pelo menos duas das cordas.

Alina escreve um número em cada ponto marcado. Dos 4038 pontos do tipo (i), ela escreve o número 0 em 2019 destes pontos, e escreve o número 1 nos outros 2019 pontos. Em cada ponto do tipo (ii), Alina escreve um inteiro qualquer (não necessariamente positivo).

Em cada corda, Alina considera os segmentos que conectam 2 pontos marcados consecutivos (uma corda com k pontos marcados tem $k - 1$ desses segmentos). Em cada um desses segmentos ela escreve 2 números. Em amarelo, ela escreve a soma dos números escritos nos pontos extremos desse segmento. Em azul, ela escreve o valor absoluto da diferença dos números escritos nos pontos extremos desse segmento.

Alina percebe que os $N + 1$ números escritos em amarelo são exatamente os números $0, 1, \dots, N$. Mostre que pelo menos um dos números escritos em azul é um número múltiplo de 3.

(Uma *corda* é um segmento de reta que conecta 2 pontos distintos de uma circunferência.)