*środa, 10 kwietnia 2019 r.*

**Zadanie 4.** Punkt $I$ jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$. Okrąg przechodzący przez punkt $B$ styczny do prostej $AI$ w punkcie $I$ przecina bok $AB$ ponownie w punkcie $P$ ($P \neq B$). Okrąg przechodzący przez punkt $C$ styczny do prostej $AI$ w punkcie $I$ przecina bok $AC$ ponownie w punkcie $Q$ ($Q \neq C$). Udowodnić, że prosta $PQ$ jest styczna do okręgu wpisanego w trójkąt $ABC$.

**Zadanie 5.** Niech $n \geqslant 2$ będzie liczbą całkowitą oraz niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami całkowitymi. Wykazać, że istnieją dodatnie liczby całkowite $b_1, b_2, \ldots, b_n$ spełniające następujące trzy warunki:

(A) $a_i \leqslant b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) reszty z dzielenia liczb $b_1, b_2, \ldots, b_n$ przez $n$ są parami różne, oraz

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leqslant n\left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

(Powyżej $\lfloor x \rfloor$ oznacza część całkowitą liczby rzeczywistej $x$, czyli największą liczbę całkowitą nie większą od liczby $x$.)

**Zadanie 6.** Alina narysowała 2019 cięciw ustalonego okręgu, przy czym końce narysowanych cięciw są parami różne. Powiemy, że punkt jest *wyróżniony*, jeśli spełnia jeden z poniższych warunków:

(i) jest jednym spośród 4038 końców cięciw,

(ii) jest punktem przecięcia co najmniej dwóch cięciw.

Alina przypisuje każdemu wyróżnionemu punktowi pewną liczbę w następujący sposób. Spośród 4038 punktów spełniających warunek (i) Alina wybiera 2019 i przypisuje im liczbę 0, a pozostałym 2019 z nich przypisuje liczbę 1. Następnie przypisuje każdemu punktowi spełniającemu warunek (ii) pewną (niekoniecznie dodatnią) liczbę całkowitą.

Na każdej z cięciw Alina rozważa odcinki łączące dwa kolejne wyróżnione punkty. (Cięciwa, na której znajduje się $k$ wyróżnionych punktów zawiera $k-1$ takich odcinków.) Przyporządkowuje ona każdemu rozważanemu odcinkowi dwie liczby: żółtą liczbę będącą sumą liczb przypisanych końcom tego odcinka, oraz niebieską liczbę będącą wartością bezwzględną ich różnicy.

Alina zauważyła, że wśród wszystkich $N+1$ żółtych liczb, każda z liczb $0, 1, \ldots, N$ wystąpiła dokładnie raz. Wykazać, że co najmniej jedna niebieska liczba jest podzielna przez 3.

(*Cięciwą* nazywamy odcinek łączący dwa różne punkty leżące na pewnym okręgu.)



Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów