Language: **Norwegian**

Day: **2**

Onsdag 10. april 2019

Oppgave 4. La ABC være en trekant med innsenter I. Sirkelen gjennom B som tangerer AI i punktet I møter siden AB igjen i punktet P. Sirkelen gjennom C som tangerer AI i punktet I møter siden AC igjen i punktet Q. Vis at PQ tangerer innsirkelen til ABC.

Oppgave 5. La $n \geq 2$ være et heltall og la $a_1, a_2, \ldots, a_n$ være positive heltall. Vis at det finnes positive heltall $b_1, b_2, \ldots, b_n$ som oppfyller følgende tre betingelser:

(A) $a_i \leq b_i$ for $i = 1, 2, \ldots, n$,

(B) restene av $b_1, b_2, \ldots, b_n$ ved divisjon på n er parvis forskjellige, og

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Her betyr $\lfloor x \rfloor$ heltallsdelen av det reelle tallet x, det vil si det største heltallet som ikke er større enn x.)

Oppgave 6. På en sirkel tegner Alina 2019 korder som alle har forskjellige endepunkter. Et punkt er *merket* dersom det enten er

(i) et av de 4038 endepunktene av en korde, eller

(ii) et skjæringspunkt mellom minst to korder.

Alina skriver et tall på hvert markerte punkt. Av de 4038 markerte punktene fra (i) skriver Alina 0 på 2019 av punktene og 1 på de restrerende 2019 punktene. På hvert av de markerte punktene fra (ii) skriver hun et vilkårlig heltall (ikke nødvendigvis positivt).

For hver korde ser Alina på linjestykkene som forbinder to påfølgende punkter. (En korde med k markerte punkter har $k - 1$ slike linjestykker.) På hvert linjestykke skriver hun i gult summen av tallene på de to endepunktene, og i blått skriver hun absoluttverdien av differansen mellom de to tallene.

Alina ser at de $N + 1$ gule tallene er tallene $0, 1, \ldots, N$ nøyaktig én gang hver. Vis at minst et blått tall er et multiplum av 3.

(En *korde* er et linjestykke som forbinder to ulike punkter på en sirkel.)

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng