

Среда, 10 април 2019 година

4. Нека ABC е триаголник таков што I е центар на неговата впишана кружница. Кружницата што минува низ точката B и ја допира AI во точката L , ја сече страната AB повторно во точката P . Кружницата што минува низ точката C и ја допира AI во точката L , ја сече страната AC повторно во точката Q . Докажи дека PQ е тангентата на впишаната кружница на триаголникот ABC .

5. Нека $n \geq 2$ е природен број и нека a_1, a_2, \dots, a_n се позитивни природни броеви. Докажи дека постојат позитивни природни броеви b_1, b_2, \dots, b_n кои што ги задоволуваат следниве три услови:

(A) $a_i \leq b_i$ за $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) остатоците на броевите b_1, b_2, \dots, b_n добиени при делење со n се попарно различни; и

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Во последниот услов, $\lfloor x \rfloor$ го означува целиот дел на реалниот број x , односно најголемиот цел број помал од x .)

6. Алина нацртала 2019 тетиви во една кружница. Меѓу себе, тетивите имаат различни крајни точки. Точка се смета за *маркирана*, ако е или

(i) една од 4038-те крајни точки на тетивите; или

(ii) пресечна точка на барем две тетиви.

На секоја маркирана точка, Алина и придружила и запишала еден број. Од 4038-те точки што го задоволуваат критериумот (i), Алина половината од нив, точно 2019 точки ги маркирала со бројот 0, а другата половина од нив, односно останатите 2019 точки ги маркирала со бројот 1. Точките што го задоволуваат критериумот (ii) таа ги маркирала со произволен цел број (не е задолжително овој број да е позитивен).

Вдолж секоја тетива, Алина ги разгледува сите отсечки кои поврзуваат маркирани точки. (Тетива со k маркирани точки, содржи $k-1$ вакви отсечки.) До секоја од овие отсечки, Алина го запишала со жолта боја збирот на броевите кои ги имаат крајните точки на отсечката, а со сина боја апсолутната вредност на нивната разлика.

Алина забележала дека жолтите броеви се точно $N+1$ на број и секоја има за вредност точно еден од броевите $0, 1, \dots, N$. Докажи дека барем еден син број е делив со 3.

(Тетива е отсечка која поврзува две различни точки од една кружница.)