

2019 m. balandžio 10 d., trečiadienis

4 uždavinys. Trikampio ABC pusiakampinės kertasi taške I . Apskritimas, liečiantis tiesę AI taške I ir einantis per B , kerta kraštinę AB taške $P \neq B$. Apskritimas, liečiantis tiesę AI taške I ir einantis per C , kerta kraštinę AC taške $Q \neq C$. Įrodykite, kad tiesė PQ liečia trikampio ABC įbrėžtinį apskritimą.

5 uždavinys. Duoti natūralūs skaičius $n \geq 2$ ir natūralieji skaičiai a_1, a_2, \dots, a_n . Įrodykite, kad egzistuoja natūralieji skaičiai b_1, b_2, \dots, b_n , tenkinantys šias tris sąlygas:

(A) $a_i \leq b_i$, kai $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) skaičių b_1, b_2, \dots, b_n dalybos iš n liekanos yra poromis skirtingos;

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Čia $\lfloor x \rfloor$ žymi realiojo skaičiaus x sveikąją dalį, t. y. didžiausią sveikąjį skaičių, ne didesnę už x .)

6 uždavinys. Alina nubrėžė 2019 vieno apskritimo stygų, kurių 4038 galai yra visi skirtingi. Tašką vadinsime *žymėtu* dviem atvejais:

(i) jei jis yra vienas iš stygų 4038 galų;

(ii) jei jis yra bent dviejų stygų sankirtos taškas.

Kiekvienam žymėtam taškui Ugnė priskyrė po skaičių. Skaičiai, priskirti 4038 taškams, tenkinantiems (i), yra 2019 nulių ir 2019 vienetų. Taškams, tenkinantiems (ii), Ugnė priskyrė bet kokius sveikuosius skaičius (nebūtinai teigiamus).

Alina nagrinėja atkarpas, į kurias kiekvieną stygą padalijo žymėti taškai. (Jei stygai priklauso k žymėtų taškų, tai ji padalyta į $k - 1$ tokią atkarpą.) Prie kiekvienos tokios atkarpos Elzė geltonu rašikliu parašė jos galų skaičių sumą, o Julija mėlynu rašikliu – tų pačių dviejų skaičių skirtumo modulį.

Taip Elzė iš viso užrašė $N + 1$ geltoną skaičių: visus skaičius $0, 1, \dots, N$ po vieną kartą. Įrodykite, kad bent vienas mėlynas Julijos skaičius dalijasi iš 3.

(Apskritimo *stygą* yra tiesės atkarpa, jungianti du skirtingus to apskritimo taškus.)