

Trešdien, 2019. gada 10. aprīlī.

4. uzdevums. Punkts I ir trijstūrī ABC ievilktais riņķa līnijas centrs. Riņķa līnija, kas novilkta caur punktu B , pieskaras taisnei AI punktā I un vēlreiz krusto malu AB punktā P . Riņķa līnija, kas novilkta caur punktu C , pieskaras taisnei AI punktā I un vēlreiz krusto malu AC punktā Q . Pierādīt, ka taisne PQ ir trijstūrī ABC ievilktais riņķa līnijas pieskare.

5. uzdevums. Dots naturāls skaitlis $n \geq 2$, un doti naturāli skaitļi a_1, a_2, \dots, a_n . Pierādīt, ka eksistē tādi naturāli skaitļi b_1, b_2, \dots, b_n , kuri vienlaicīgi apmierina sekojošus trīs nosacījumus:

(A) $a_i \leq b_i$, katram $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) visi atlikumi, kurus iegūst dalot b_1, b_2, \dots, b_n ar n , ir pa pāriem savstarpēji atšķirīgi; un

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Ar $\lfloor x \rfloor$ apzīmē reāla skaitļa x veselo daļu, t.i. lielāko veselo skaitli, kas nepārsniedz x .)

6. uzdevums. Alīna riņķa līnijā novelk 2019 hordas, un visi novilkto hordu galapunkti ir dažādi punkti. Tiek *atzīmēti* šādi punkti:

(i) katrs no novilkto hordu 4038 galapunktiem;

(ii) visi krustpunkti, kuros krustojas divas vai vairākas hordas.

Alīna katram *atzīmētajam* punktam piešķir veselu skaitli. No, nosacījumam (i) atbilstošajiem, 4038 punktiem Alīna izvēlās 2019 punktus un piešķir tiem skaitli 0, bet pārējiem 2019 punktiem - skaitli 1. Nosacījumam (ii) atbilstošajiem punktiem Alīna piešķir patvaļīgu veselu skaitli (ne obligāti pozitīvu).

Uz katras hordas Alīna aplūko nogriežņus, kas savieno divus blakus esošus *atzīmētos* punktus. (Uz hordas ar k atzīmētajiem punktiem atrodas $k - 1$ šāds nogrieznis). Katram hordas nogrieznim tiek piešķirts dzeltens skaitlis, kas ir abiem tā galapunktiem piešķirto skaitļu summa, un zils skaitlis, kas ir tā galapunktu skaitļu starpības modulis. Alīna ievēro, ka visi $N + 1$ dzeltenie skaitļi satur katru no $0, 1, \dots, N$ vērtībām tieši vienu reizi.

Pierādīt, ka vismaz viens zilais skaitlis dalās ar 3.

(Horda ir nogrieznis, kas savieno divus dažādus riņķa līnijas punktus.)