

Сәрсенбі, 2019 ж. 10 сәуір

Есеп 4. ABC үшбұрышының іштей сызылған шеңбердің ортасы I нүктесі болсын. B нүктеден өтетін және AI түзуді I нүктесінде жанайтын шеңбер екінші рет AB қабырғаны P нүктесінде қияды. C нүктеден өтетін және AI түзуді I нүктесінде жанайтын шеңбер екінші рет AC қабырғаны Q нүктесінде қияды. PQ түзуі ABC үшбұрышына іштей сызылған шеңберді жанайтынын дәлелдеңіз.

Есеп 5. $n \geq 2$ — бүтін саны және a_1, a_2, \dots, a_n — бүтін оң сандары болсын. Келесі үш шартты қанағаттандыратын b_1, b_2, \dots, b_n бүтін оң сандар табылатынын дәлелдеңіздер:

(A) кез келген $i = 1, 2, \dots, n$ үшін $a_i \leq b_i$;

(B) b_1, b_2, \dots, b_n сандардың n -ға бөлгенде қалдықтары бір-бірене тең емес; және

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$.

(Осы есепте нақты x санның бүтін бөлігі $[x]$ арқылы белгіленген, демек, x -тан аспайтын ең үлкен бүтін саны.)

Есеп 6. Алина шеңбердің ішіне төбелері беттеспейтін 2019 хорда салады. Нүкте *белгіленген* деп аталады, егерде ол

(i) хордалардың 4038 төбелердің бірі; немесе

(ii) кем дегенде екі хордалардың қиылысу нүктесі.

Алина әр белгіленген нүктені нөмірлейді. Алина (i)-шартты қанағаттандыратын 4038 нүктенің ішінен 2019 нүктені 0 санымен нөмірлейді, ал қалған 2019 нүктені 1 санымен нөмірлейді. Ол (ii)-шартты қанағаттандыратын әр нүктені кез келген бүтін санымен нөмірлейді (олар оң сандар болуы міндетті емес).

Алина әр хорданың бойында көршілес белгіленген нүктелерді қосатын кесінділерді қарастырады. (Егерде хордада k нүкте белгіленген болса, $k - 1$ кесінді пайда болады.) Ол осындай әр кесіндіге сары белгі қояды — төбелер нөмірлердің қосындысы және көк белгі қояды — төбелер нөмірлердің айырмасының модулі.

Алина келесіні байқады: барлығы $N + 1$ сары белгі бар, және олар барлық $0, 1, \dots, N$ сандарды бір-бірден қамтиді. Кем дегенде бір көк белгі 3-ке бөлінетінін дәлелдеңіз.

(Шеңбердің кез келген екі әртүрлі нүктені қосатын кесінді *хорда* деп аталады.)