

2019年4月10日 水曜日

問題 4. 三角形 ABC の内心を I とする. 点 B を通り I において直線 AI に接する円が辺 AB と交わる点のうち B でない方を P とする. また, 点 C を通り I において直線 AI に接する円が辺 AC と交わる点のうち C でない方を Q とする. このとき, 直線 PQ は三角形 ABC の内接円に接することを示せ.

問題 5. n を 2 以上の整数とし, a_1, a_2, \dots, a_n を正の整数とする. このとき, 次の 3 つの条件をみたす正の整数 b_1, b_2, \dots, b_n が存在することを示せ.

- (A) $i = 1, 2, \dots, n$ に対して $a_i \leq b_i$ である.
 (B) b_1, b_2, \dots, b_n を n で割った余りはすべて異なる.
 (C) 不等式

$$b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$$

が成り立つ.

ただし, 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す.

問題 6. アリーナは, ある円の周上に端点がすべて異なるように 2019 本の弦を書き, 次のいずれかの条件をみたす点すべてに印をつける.

- (i) 弦の端点 4038 個のうちのいずれかである.
 (ii) 2 本以上の弦の交点である.

アリーナはそれぞれの印のついた点に, 以下のように整数を割り当てる.

- 条件 (i) をみたす 4038 個の点のうち 2019 個に 0, 残りの 2019 個に 1 を割り当てる.
- 条件 (ii) をみたすそれぞれの点には整数を 1 つ任意に割り当てる (割り当てる整数は正でなくてもよい).

各弦において, アリーナは隣り合う 2 つの印のついた点を端点とする線分を考え (印のついた点が k 個ある弦は $k-1$ 個のそのような線分からなる), そのような線分それぞれに対して, 2 つの端点に割り当てられた整数の和を黄色で, 差の絶対値を青色で書き込む.

書き込まれた黄色の数が $N+1$ 個あり, $0, 1, \dots, N$ がちょうど 1 回ずつ書き込まれているとき, 少なくとも 1 つの青色の 3 の倍数が書き込まれていることを示せ.

ただし, 弦とは円周上の異なる 2 点を結ぶ線分のことをいう.