

Mercoledì, 10 Aprile 2019

Problema 4. Sia ABC un triangolo con incentro I . La circonferenza passante per B e tangente ad AI in I interseca nuovamente il lato AB in P . La circonferenza passante per C e tangente ad AI in I interseca nuovamente il lato AC in Q .

Dimostrare che PQ è tangente alla circonferenza inscritta al triangolo ABC .

Problema 5. Sia $n \geq 2$ un intero, e siano a_1, a_2, \dots, a_n degli interi positivi.

Dimostrare che esistono degli interi positivi b_1, b_2, \dots, b_n che soddisfano le seguenti tre condizioni:

(A) $a_i \leq b_i$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) i resti di b_1, b_2, \dots, b_n nella divisione per n sono a due a due distinti;

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Qui $\lfloor x \rfloor$ indica la parte intera del numero reale x , cioè il più grande intero minore o uguale di x .)

Problema 6. Su una circonferenza, Alessandra traccia 2019 corde i cui estremi sono tutti distinti. Un punto si considera *contrassegnato* se è

- (i) uno dei 4038 estremi di una corda; oppure
- (ii) un punto di intersezione di almeno due corde.

Alessandra etichetta ogni punto contrassegnato. Dei 4038 punti che soddisfano la condizione (i), Alessandra ne etichetta 2019 con uno 0, e gli altri 2019 con un 1. Alessandra etichetta ogni punto che soddisfa la condizione (ii) con un intero arbitrario (non necessariamente positivo).

Lungo ogni corda, Alessandra considera i segmenti che congiungono due punti contrassegnati consecutivi. (Una corda con k punti contrassegnati ha $k - 1$ segmenti di questo tipo.) Alessandra etichetta ognuno di questi segmenti in giallo con la somma delle etichette dei suoi due estremi, e in blu con il valore assoluto della loro differenza.

Alessandra scopre che le $N + 1$ etichette gialle assumono ogni valore $0, 1, \dots, N$ esattamente una volta.

Dimostrare che almeno una delle etichette blu è multipla di 3.

(Una *corda* è un segmento che congiunge due punti distinti su una circonferenza.)