2019. április 10., szerda

4. Feladat Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I. Jelöljük az AB oldal és a B-n átmenő AI-t I-ben érintő kör B-től különböző metszéspontját P-vel. Jelöljük az AC oldal és a C-n átmenő AI-t I-ben érintő kör C-től különböző metszéspontját Q-val. Bizonyítsuk be, hogy ekkor PQ érinti az ABC háromszög beírt körét.

5. Feladat Legyen $n \geq 2$ egész szám, és legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy léteznek $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pozitív egész számok, amelyekre a következő három feltétel teljesül:

(A) $a_i \leq b_i$ minden $i = 1, 2, \ldots, n$-re;

(B) $b_1, b_2, \ldots, b_n$-nek n-nel való osztási maradékai páronként különbözőek; és

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\dfrac{n-1}{2} + \left\lfloor \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

($\lfloor x \rfloor$ a valós szám x egészrészét jelöli, tehát a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb, mint x.)

6. Feladat Egy körbe Alina 2019 húrt rajzolt, különböző végpontokkal. Egy pontot *megjelöltnek* tekintünk, ha

(i) a 4038 húr-végpont valamelyike; vagy

(ii) legalább két húr metszéspontja.

Alina minden pontot feliratoz. A 4038 pontból ami az (i) feltételnek felel meg, Alina 2019 pontot 0-val feliratoz, és a maradék 2019 pontot 1-gyel. Az (ii) feltételnek megfelelő pontokat egy tetszőleges (nem feltétlenül pozitív) egész számmal látja el.

Alina minden húron a szomszédos megjelölt pontok közötti szakaszokat vizsgálja. (Egy húr k megjelölt ponttal $k-1$ ilyen szakaszt tartalmaz.) Minden ilyen szakaszra sárgával felírja a szakasz végpontjainak összegét és kékkel felírja a végpontok különbségének abszolút értékét.

Alina azt találja, hogy az $N+1$ sárga felirat a $0, 1, \ldots, N$ értékek mindegyikét pontosan egyszer veszi fel. Mutassuk meg, hogy legalább egy kék felirat osztható 3-mal!

(A *húr* a körvonal két különböző pontját összekötő egyenes szakasz.)

Megoldási idő: 4 óra 30 perc.
Minden feladat 7 pontot ér.