

יום רביעי, 10 באפריל, 2019

שאלה 4. יהא ABC משולש עם מרכז מעגל חסום I . המעגל דרך B המשיק ל- AI ב- I פוגש את הצלע AB שנית בנקודה P . המעגל דרך C המשיק ל- AI ב- I פוגש את הצלע AC שנית ב- Q . הוכיחי כי PQ משיק למעגל החסום של ABC .

שאלה 5. יהא $n \geq 2$ מספר שלם, ויהיו a_1, a_2, \dots, a_n שלמים חיוביים. הוכיחי כי קיימים שלמים חיוביים b_1, b_2, \dots, b_n המקיימים את שלושת התנאים הבאים:

$$(א) \quad a_i \leq b_i \quad \text{לכל } i = 1, 2, \dots, n$$

(ב) השאריות של b_1, b_2, \dots, b_n בחלוקה ב- n שונות בזוגות;

$$(ג) \quad b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$$

(כאן, $[x]$ מסמן את הערך השלם של המספר הממשי x , כלומר, את השלם הגדול ביותר שאינו גדול מ- x .)

שאלה 6. אלינה ציירה 2019 מיתרים במעגל, אשר כל נקודות הקצה שלהם שונות. נקודה נקראת מסומנת אם היא

(i) אחת מ-4038 הקצוות של המיתרים המצוירים; או

(ii) נקודת חיתוך של לפחות שני מיתרים.

אלינה תייגה את כל הנקודות המסומנות. מתוך 4038 הנקודות המקיימות את תכונה (i), אלינה תייגה בדיוק 2019 במספר 0, ואת 2019 הנקודות האחרות במספר 1. היא תייגה כל נקודה המקיימת את תכונה (ii) במספר שלם שרירותי (לא בהכרח חיובי).

בכל מיתר, אלינה התבוננה בקטעים המחברים נקודות מסומנות עוקבות (במיתר עם k נקודות מסומנות יש $k - 1$ קטעים כאלו). היא תייגה כל קטע כזה בצהוב בסכום התגיות של שני קצותיו, ובכחול בערך המוחלט של ההפרש ביניהם.

אלינה הבחינה ש- $N + 1$ התגיות הצהובות מקבלות כל אחד מהערכים $0, 1, \dots, N$ פעם אחת בדיוק. הוכיחי כי לפחות תגית כחולה אחת הינה כפולה של 3.

(מיתר הינו קטע המחבר שתי נקודות שונות על מעגל.)

Language: Hebrew

משך הבחינה 4 שעות ו-30 דקות
כל שאלה שווה 7 נקודות