

Τετάρτη, 10 Απριλίου, 2019

Πρόβλημα 4. Έστω ABC τρίγωνο με έγκεντρο I . Ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από το B και εφάπτεται της AI στο I τέμνει ξανά την πλευρά AB στο P . Ο κύκλος ο οποίος διέρχεται από το C και εφάπτεται της AI στο I τέμνει ξανά την πλευρά AC στο Q . Να αποδειχθεί ότι η PQ εφάπτεται στον εγγεγραμμένο κύκλο του ABC .

Πρόβλημα 5. Έστω $n \geq 2$ ένας ακέραιος, και έστω a_1, a_2, \dots, a_n θετικοί ακέραιοι. Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν θετικοί ακέραιοι b_1, b_2, \dots, b_n οι οποίοι να ικανοποιούν τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

(A) $a_i \leq b_i$ για $i = 1, 2, \dots, n$,

(B) τα υπόλοιπα των b_1, b_2, \dots, b_n όταν διαιρεθούν με τον n είναι ανά δύο διαφορετικά, και

(Γ) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Εδώ, το $\lfloor x \rfloor$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος του πραγματικού αριθμού x , δηλαδή, τον μεγαλύτερο ακέραιο ο οποίος δεν υπερβαίνει τον x .)

Πρόβλημα 6. Σε έναν κύκλο η Αλίνα σχεδιάζει 2019 χορδές, τα άκρα των οποίων είναι όλα διαφορετικά. Ένα σημείο θεωρείται *σημαδεμένο* εάν είναι είτε

(i) ένα από τα 4038 άκρα των χορδών, είτε

(ii) ένα σημείο τομής τουλάχιστον δύο χορδών.

Η Αλίνα βάζει έναν αριθμό σε κάθε σημαδεμένο σημείο. Από τα 4038 σημεία τα οποία ικανοποιούν το κριτήριο (i), η Αλίνα βάζει σε 2019 σημεία το 0 και στα υπόλοιπα 2019 σημεία το 1. Σε κάθε σημείο το οποίο ικανοποιεί το κριτήριο (ii) βάζει έναν αυθαίρετο ακέραιο (όχι απαραίτητα θετικό).

Κατά μήκος κάθε χορδής, η Αλίνα θεωρεί τα τμήματα τα οποία συνδέουν δύο διαδοχικά σημαδεμένα σημεία. (Μια χορδή με k σημαδεμένα σημεία έχει $k - 1$ τέτοια τμήματα.) Σε κάθε τέτοιο τμήμα βάζει μια κίτρινη ετικέτα με το άθροισμα των αριθμών των άκρων του και μια μπλε ετικέτα με την απόλυτη τιμή της διαφοράς των αριθμών των άκρων του.

Η Αλίνα παρατηρεί ότι οι $N + 1$ κίτρινες ετικέτες λαμβάνουν κάθε μια από τις τιμές $0, 1, \dots, N$ ακριβώς μια φορά. Να αποδειχθεί ότι η τιμή τουλάχιστον μιας μπλε ετικέτας είναι πολλαπλάσιο του 3.

(Χορδή είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο συνδέει δύο διαφορετικά σημεία ενός κύκλου.)