

Mittwoch, 10. April 2019

**Aufgabe 4.** Sei  $ABC$  ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt  $I$ . Der Kreis, welcher durch  $B$  verläuft und die Gerade  $AI$  in  $I$  berührt, schneidet  $AB$  erneut in  $P$ . Der Kreis, welcher durch  $C$  verläuft und die Gerade  $AI$  in  $I$  berührt, schneidet  $AC$  erneut in  $Q$ . Zeige, dass  $PQ$  eine Tangente des Inkreises von  $ABC$  ist.

**Aufgabe 5.** Sei  $n \geq 2$  eine ganze Zahl, und seien  $a_1, a_2, \dots, a_n$  positive ganze Zahlen. Zeige, dass positive ganze Zahlen  $b_1, b_2, \dots, b_n$  existieren, welche die folgenden drei Bedingungen erfüllen:

(A)  $a_i \leq b_i$  für  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(B) die Reste von  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bei Division durch  $n$  sind paarweise verschieden; und

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$ .

(Hierbei bezeichnet  $\lfloor x \rfloor$  die größte (grösste) ganze Zahl, welche kleinergleich  $x$  ist.)

**Aufgabe 6.** In einen Kreis zeichnet Alina 2019 Sehnen ein, deren Endpunkte alle unterschiedlich sind. Ein Punkt heißt (heisst) *markiert*, wenn er entweder

(i) einer der 4038 Endpunkte einer Sehne ist; oder

(ii) ein Schnittpunkt von mindestens zwei Sehnen ist.

Alina beschriftet jeden markierten Punkt wie folgt: Von den 4038 Punkten, welche Bedingung (i) erfüllen, beschriftet Alina 2019 Punkte mit einer 0 und die anderen 2019 Punkte mit einer 1. Jeden Punkt, welcher Bedingung (ii) erfüllt, beschriftet sie mit einer beliebigen ganzen Zahl (nicht notwendigerweise positiv).

Auf jeder Sehne betrachtet Alina die Streckenabschnitte, welche zwei aufeinanderfolgende markierte Punkte verbinden. (Eine Sehne mit  $k$  markierten Punkten hat  $k-1$  solche Streckenabschnitte.) Alina beschriftet jeden solchen Streckenabschnitt in gelb mit der Summe der Beschriftungen seiner zwei Endpunkte und in blau mit dem Betrag ihrer Differenz.

Alina stellt fest, dass die  $N+1$  gelben Beschriftungen jeden der Werte  $0, 1, \dots, N$  genau einmal annehmen. Zeige, dass mindestens eine der blauen Beschriftungen ein Vielfaches von 3 ist.

(Eine *Sehne* ist eine Strecke, welche zwei verschiedene Punkte eines Kreises verbindet.)