Mercredi 10 avril 2019

Problème 4. Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit. Le cercle passant par B et tangent à la droite (AI) en I recoupe le côté $[AB]$ en P. Le cercle passant par C et tangent à la droite (AI) en I recoupe le côté $[AC]$ en Q. Prouver que la droite (PQ) est tangente au cercle inscrit à ABC.

Problème 5. Soit $n \geqslant 2$ un entier et soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des entiers strictement positifs. Prouver qu'il existe des entiers strictement positifs $b_1, b_2, \ldots, b_n$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

(A) $a_i \leqslant b_i$ pour $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) les restes des divisions de $b_1, b_2, \ldots, b_n$ par n sont distincts deux à deux ;

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leqslant n\left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor\right)$.

(On note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière du réel x, c'est-à-dire, le plus grand entier ne dépassant pas x.)

Problème 6. Sur un cercle, Aline trace 2019 cordes dont les extrémités sont toutes différentes. Un point est dit *spécial* s'il est

(i) soit une des 4038 extrémités d'une corde ;

(ii) soit un point d'intersection d'au moins deux cordes.

Aline étiquette chaque point spécial. Parmi les 4038 points satisfaisant le critère (i), Aline étiquette 2019 points par un 0 et les 2019 autres par un 1. Elle étiquette chaque point satisfaisant le critère (ii) par un entier quelconque (non nécessairement positif).

Le long de chaque corde, Aline s'intéresse aux segments reliant deux points spéciaux consécutifs (une corde ayant k points spéciaux possède donc $k-1$ tels segments). Sur chacun de ces segments, elle écrit en jaune la somme des étiquettes de ses deux extrémités et en bleu la valeur absolue de leur différence.

Aline remarque que les $N+1$ nombres jaunes prennent chacune des valeurs $0, 1, \ldots, N$ une et une seule fois. Montrer qu'au moins un nombre bleu est un multiple de 3.

(Une *corde* est un segment reliant deux points distincts d'un cercle.)

Temps: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points