

Keskiviikkona 10 huhtikuuta 2019

Tehtävä 4. Olkoon ABC kolmio, jonka sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste on I . Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen B kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AB jälleen pisteessä P . Suoraa AI pisteessä I sivuava pisteen C kautta kulkeva ympyrä leikkaa sivun AC jälleen pisteessä Q . Osoita, että suora PQ sivuaa kolmion ABC sisäänpiirrettyä ympyrää.

Tehtävä 5. Olkoon $n \geq 2$ kokonaisluku ja olkoot a_1, a_2, \dots, a_n positiivisia kokonaislukuja. Osoita, että on olemassa positiiviset kokonaisluvut b_1, b_2, \dots, b_n , jotka toteuttavat seuraavat kolme ehtoa:

(A) $a_i \leq b_i$, kun $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) lukujen b_1, b_2, \dots, b_n jakojäännökset luvulla n jaettaessa ovat pareittain erisuuria; ja

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Merkintä $\lfloor x \rfloor$ tarkoittaa reaaliluvun x kokonaisosaa, eli suurinta kokonaislukua, joka ei ole suurempi kuin x .)

Tehtävä 6. Alina piirtää ympyrälle 2019 jännettä, joiden kaikki päätepisteet ovat eri pisteitä. Pistettä kutsutaan *merkityksi*, jos se on joko

- (i) jokin jänneiden 4038 päätepisteestä; tai
- (ii) ainakin kahden jänteen leikkauspiste.

Alina nimeää jokaisen merkityn pisteen kirjoittamalla sen viereen kokonaisluvun. Alina nimeää ehdon (i) toteuttavista 4038 pisteestä 2019 pistettä luvulla 0 ja loput 2019 pistettä luvulla 1. Hän nimeää ehdon (ii) toteuttavat pisteet mielivaltaisilla kokonaisluvuilla (joiden ei välttämättä tarvitse olla positiivisia).

Jokaisella jännteellä Alina tarkastelee janoja, jotka ovat kahden peräkkäisen merkityn pisteen välissä. (Sellaisella jännteellä, jolla on k merkittyä pistettä, on $k-1$ tällaista janaa.) Hän kirjoittaa jokaisen sellaisen janan viereen keltaisella janan kahden päätepisteen lukujen summan ja sinisellä niiden erotuksen itseisarvon.

Alina huomaa, että keltaiset luvut, joita on $N+1$ kappaletta saavat kaikki arvot $0, 1, \dots, N$ täsmälleen kerran. Osoita, että ainakin yksi sininen luku on luvun 3 monikerta.

(*Jänne* on jana, joka yhdistää kaksi ympyrän kaaren eri pistettä.)