Woensdag 10 april 2019

Opgave 4. Zij ABC een driehoek met I het middelpunt van de ingeschreven cirkel. De cirkel door B die raakt aan AI in I snijdt zijde AB nogmaals in P. De cirkel door C die raakt aan AI in I snijdt zijde AC nogmaals in Q. Bewijs dat PQ raakt aan de ingeschreven cirkel van $\triangle ABC$.

Opgave 5. Zij $n \geq 2$ een geheel getal, en laat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ (strikt) positieve gehele getallen zijn. Bewijs dat er (strikt) positieve gehele getallen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ bestaan die aan de volgende drie voorwaarden voldoen:

(A) $a_i \leq b_i$ voor $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) de resten van $b_1, b_2, \ldots, b_n$ na deling door n zijn allemaal verschillend; en

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Hier staat $\lfloor x \rfloor$ voor het grootste gehele getal kleiner dan of gelijk aan x.)

Opgave 6. Alina tekent 2019 koorden op een cirkel, met allemaal verschillende eindpunten. (Een *koorde* is een lijnstuk tussen twee verschillende punten op een cirkel.) Een *gemarkeerd* punt is een punt dat ofwel

(i) één van de 4038 eindpunten van een koorde is; ofwel

(ii) het snijpunt van minstens twee koorden is.

Alina schrijft een getal bij elk gemarkeerd punt. Bij 2019 van de 4038 punten uit (i) schrijft Alina een 0 en bij de andere 2019 punten uit (i) schrijft Alina een 1. Bij elk punt uit (ii) schrijft ze een willekeurig geheel getal (niet noodzakelijk positief).

Alina bekijkt steeds een lijnstuk tussen twee naast elkaar gelegen gemarkeerde punten. (Een koorde met k gemarkeerde punten bevat $k-1$ van zulke lijnstukken.) Van de twee getallen die bij deze punten staan, schrijft Alina bij het lijnstuk in het geel de som en in het blauw het absolute verschil. Ze doet dit voor alle lijnstukken op alle koorden.

Alina ontdekt dat bij de $N+1$ gele getallen elke waarde uit $0, 1, \ldots, N$ precies één keer voorkomt. Bewijs dat er een blauw getal bestaat dat een veelvoud van 3 is.

Beschikbare tijd: 4 uur en 30 minuten
Elke opgave is 7 punten waard