

Středa, 10. dubna 2019

Úloha 4. Necht I je střed kružnice ω vepsané trojúhelníku ABC . Kružnice procházející bodem B , která sa dotýká AI v bodě I , protíná stranu AB v bodě P ($P \neq B$). Analogicky, kružnice procházející bodem C , která se dotýká AI v bodě I , protíná stranu AC v bodě Q ($Q \neq C$). Dokažte, že přímka PQ je tečnou kružnice ω .

Úloha 5. Necht $n \geq 2$ je celé číslo a a_1, a_2, \dots, a_n jsou kladná celá čísla. Dokažte, že existují kladná celá čísla b_1, b_2, \dots, b_n splňující následující tři podmínky:

(A) $a_i \leq b_i$ pro $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) zbytky po dělení čísel b_1, b_2, \dots, b_n číslem n jsou po dvou různé; a

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Symbol $\lfloor x \rfloor$ označuje dolní celou část reálného čísla x , což je největší celé číslo nepřevyšující x .)

Úloha 6. Alena nakreslila na kružnici 2019 tětív s navzájem různými krajními body. Bod nazveme *označený*, právě když jde o

- (i) jeden z 4038 krajních bodů těchto tětív; nebo
- (ii) průsečík aspoň dvou z těchto tětív.

Alena potom každý z označených bodů číselně ohodnotila. Ze všech 4038 krajních bodů splňujících (i) ohodnotila některých 2019 bodů číslem 0 a zbývajících 2019 bodů číslem 1. Následně ohodnotila všechny body splňující (ii) libovolným celým číslem (ne nutně kladným).

Na každé tětívě uvažovala úsečky spojující po sobě jdoucí označené body. (Tětiva s k označenými body obsahuje $k - 1$ takových úseček.) Dále ohodnotila každou takovou úsečku dvěma čísly, z nichž jedno je žluté a druhé modré, přičemž žlutá čísla představují součet číselných ohodnocení koncových bodů na ohodnocované úsečce a modrá čísla absolutní hodnotu jejich rozdílu.

Následně Alena zjistila, že mezi všemi $N + 1$ žlutými čísly se každé z čísel $0, 1, \dots, N$ vyskytuje právě jednou. Dokažte, že aspoň jedno modré číslo je násobkem 3.