Сряда, 10 април 2019

Задача 4. Даден е триъгълник ABC с център на вписаната окръжност I. Окръжността през точка B, допираща се до AI в точка I, пресича отсечката AB за втори път в точка P. Окръжността през точка C, допираща се до AI в точка I, пресича отсечката AC за втори път в точка Q. Да се докаже, че PQ се допира до вписаната в триъгълник ABC окръжност.

Задача 5. За естествено $n \geq 2$, нека $a_1, a_2, \ldots, a_n$ са естествени числа. Да се докаже, че съществуват естествени числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$, които изпълняват следните три условия:

(A) $a_i \leq b_i$ за $i = 1, 2, \ldots, n$;

(B) остатъците на $b_1, b_2, \ldots, b_n$ при деление на n са два по два различни; и

(C) $b_1 + \cdots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Тук $\lfloor x \rfloor$ обозначава цялата част на реалното число x, т.е. най-голямото цяло число, което не надвишава x.)

Задача 6. Андрей чертае 2019 хорди от една окръжност, всеки две от които имат различни краища. Една точка се нарича *маркирана* ако е или

(i) измежду 4038-те краища на хорди; или

(ii) пресечна точка на поне две хорди.

Андрей записва число във всяка маркирана точка. Измежду 4038-те маркирани точки по критерий (i), Андрей избира 2019, в които да запише числото 0, а в останалите 2019 той записва числото 1. Във всяка от точките по критерий (ii) той записва произволно цяло число (не задължително положително).

По всяка хорда, Андрей раглежда отсечките, определени от съседни маркирани точки. (Хорда с k маркирани точки съдържа $k - 1$ такива отсечки.) За всяка от тези отсечки, той записва в жълто сумата на числата, записани в двата ѝ края, и в синьо - абсолютната стойност на разликата им.

Андрей открива, че $N + 1$-те жълти числа приемат всяка от стойностите $0, 1, \ldots, N$ точно веднъж. Да се докаже, че поне едно от сините числа е кратно на 3.

(Наричаме *хорда* всяка отсечка, съединяваща две различни точки от окръжност.)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява с до 7 точки