

srijeda, 10. april 2019.

Zadatak 4. Neka je I centar upisane kružnice trougla ABC . Kružnica koja prolazi kroz tačku B i tangenta je na AI u I siječe stranicu AB ponovo u P . Kružnica koja prolazi kroz tačku C i tangenta je na AI u I siječe stranicu AC ponovo u Q . Dokazati da je PQ tangenta na upisanu kružnicu trougla ABC .

Zadatak 5. Dat je prirodan broj $n \geq 2$ i prirodni brojevi a_1, \dots, a_n . Dokazati da postoje prirodni brojevi b_1, \dots, b_n koji zadovoljavaju sljedeće tri osobine:

(A) $a_i \leq b_i$ za $i = 1, 2, \dots, n$;

(B) ostaci pri dijeljenju brojeva b_1, \dots, b_n sa n su po parovima različiti; i

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

(Ovdje $\lfloor x \rfloor$ označava cio dio realnog broja x , tj. to je najveći cijeli broj koji nije veći od x .)

Zadatak 6. Danijel povlači 2019 tetiva u kružnici tako da su sve krajnje tačke tetiva različite. Tačka se naziva *specijalnom* ako je ili

- i) jedna od 4038 krajnjih tačaka tetiva; ili
- ii) tačka presjeka barem dvije tetive.

Danijel numeriše svaku *specijalnu* tačku. Od 4038 tačaka koje zadovoljavaju uvjet (i), Danijel numeriše njih 2019 sa 0, a preostalih 2019 sa 1. Također numeriše svaku tačku koja zadovoljava uvjet (ii) sa proizvoljnim cijelim brojem (ne nužno pozitivnim).

Duž svake tetive, Danijel razmatra segmente koji spajaju dvije susjedne specijalne tačke. (Tetiva sa k specijalnih tačaka ima $k - 1$ takvih segmenata). On numeriše svaki takav segment sa dvije boje; žutom bojom napiše sumu brojeva kojima su numerisane dvije krajnje tačke tog segmenta, i plavom bojom napiše apsolutnu vrijednost razlike ta dva broja.

Danijel uvidi da $N + 1$ žutih brojeva uzima svaku od vrijednosti $0, 1, \dots, N$ tačno jednom. Dokazati da je barem jedan plavi broj djeljiv sa 3.

(Tetiva je duž koja spaja dvije različite tačke na kružnici.)

Language: Bosnian

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak vrijedi 7 poena