

Серада, 10 красавіка 2019 г.

**Задача 4.** Пункт  $I$  — цэнтр ўпісанай акружнасці трохвугольніка  $ABC$ . Акружнасць, якая праходзіць праз пункт  $B$  і датыкаецца  $AI$  у пункце  $I$ , перасякае бок  $AB$  другім разам у пункце  $P$ . Акружнасць, якая праходзіць праз пункт  $C$  і датыкаецца  $AI$  у пункце  $I$ , перасякае бок  $AC$  другім разам у пункце  $Q$ . Дакажыце, што  $PQ$  датыкаецца ўпісанай акружнасці трохвугольніка  $ABC$ .

**Задача 5.** Няхай  $n \geq 2$  і  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — натуральныя лікі. Дакажыце, што існуюць натуральныя лікі  $b_1, b_2, \dots, b_n$ , якія задавальняюць наступным тром умовам:

(A)  $a_i \leq b_i$  пры  $i = 1, 2, \dots, n$ ;

(B) астачы лікаў  $b_1, b_2, \dots, b_n$  пры дзяленні на  $n$  парамі розныя; і

(C)  $b_1 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lceil \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rceil \right)$ .

(Тут праз  $[x]$  азначана цэлая частка рэчаіснага ліку  $x$ , г. зн., найбольшы цэлы лік, не большы за  $x$ .)

**Задача 6.** Аліна праводзіць у акружнасці 2019 хорд, усе канцы якіх розныя. Пункт завецца *адзначаным*, калі ён альбо

(i) адзін з 4038 канцоў хорд; альбо

(ii) пункт перасячэння хаця б дзвюх хорд.

Кожнаму адзначанаму пункту Аліна ставіць у адпаведнасць лік. З 4038 пунктаў, задавальняючых крытэрыю (i), Аліна 2019 пунктам ставіць у адпаведнасць 0, а іншым 2019 пунктам ставіць у адпаведнасць 1. Кожнаму пункту, задавальняючаму крытэрыю (ii), яна ставіць у адпаведнасць адвольны цэлы лік (не абавязкова дадатны).

Разам з кожнай хордай Аліна разглядае адрэзкі, паміж паслядоўнымі адзначанымі пунктамі. (Хорда з  $k$  адзначанымі пунктамі ўтрымлівае  $k-1$  такіх адрэзак.) Побач з кожным такім адрэзкам яна напісала жоўтым колерам суму лікаў, адпаведных яго канцам, а блакітным колерам — модуль іх рознасці.

Аліна заўважыла, што ўсяго ёсць  $N+1$  жоўты лік, і жоўтыя лікі прымаюць кожнае значэнне  $0, 1, \dots, N$  роўна адзін раз. Дакажыце, што не менш за адзін блакітны лік дзеліцца на 3.

(Хорда — гэта адрэзак, які злучае два розныя пункты акружнасці.)