

Çərşənbə 10 aprel 2019

Məsələ 4. ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrənin mərkəzini I ilə işarə edək. B nöqtəsindən keçməklə AI düz xəttinə I nöqtəsində toxunan çevrə AB tərəfini ikinci dəfə P nöqtəsində kəsir. C nöqtəsindən keçməklə AI düz xəttinə I nöqtəsində toxunan çevrə AC tərəfini ikinci dəfə Q nöqtəsində kəsir. İsbat edin ki, PQ düz xətti ABC üçbucağının daxilinə çəkilmiş çevrəyə toxunur.

Məsələ 5. $n \geq 2$ tam ədədi və a_1, a_2, \dots, a_n müsbət tam ədədləri verilmişdir. İsbat edin ki, elə b_1, b_2, \dots, b_n müsbət tam ədədləri mövcuddur ki, aşağıdakı üç şərt ödənilir:

(A) $a_i \leq b_i, \quad i = 1, 2, \dots, n;$

(B) b_1, b_2, \dots, b_n ədədlərinin n ədədinə böldükdə alınan qalıqlar biri-birindən fərqlidirlər

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right).$

(Burada $\lfloor x \rfloor$ ilə x həqiqi ədədinin tam hissəsi işarə edilmişdir. Bu ədəd x -dən böyük olmayan ən böyük tam ədəddir).

Məsələ 6. Leyla çevrə üzərində hər hansı ikisinin uc nöqələri biri-birindən fərqli olan 2019 sayda vətər çəkir. Nöqtənin *işarələnmiş* olması üçün

(i) bu vətərlərin 4038 sayda uc nöqtəsindən biri və ya

(ii) ən azından iki vətərin kəsişmə nöqtəsi

olmalıdır.

Leyla işarələnmiş nöqtələrin hər birini etiketləyir. (i) şərtini ödəyən 4038 nöqtədən 2019-nu 0 ilə digər 2019-nu isə 1 ilə etiketləyir. Leyla (ii) şərti ödəyən hər hansı nöqtəni bir tam ədəd ilə etiketləyir (müsbət olması vacib deyil).

Leyla hər bir vətər üçün bu vətərin üzərində olan ardıcıl işarələnmiş nöqtələri birləşdirən bütün düz xətt parçalarına baxır. (Üstündə k sayda işarələnmiş nöqtə olan vətər bu şəkildə təyin edilmiş $k-1$ sayda parçaya malikdir). Leyla bu düz parçalarının hər birini, bu düz xətt parçasının iki uc nöqtəsinin cəmi ilə sarı rənglə və fərqlinin mütləq qiyməti ilə isə mavi rəng ilə etiketləyir.

Leyla qeyd edilən sarı etiket sayının $N+1$ olduğunu və $0, 1, \dots, N$ ədədlərindən hər birinə tam olaraq bir sarı rəngli etiketin olduğunu müşahidə edir. Belə olduqda, ən azı bir mavi etiketin 3-ün misli olduğunu isbat edin.

(Vətər – çevrə üzərində yerləşən iki nöqtəni birləşdirən düz xətt parçasına deyilir).