

الأربعاء 10 أبريل 2019.

**السؤال الرابع:** لدينا النقطة  $I$  مركز الدائرة الداخلية للمثلث  $ABC$ . الدائرة المارة بالنقطة  $B$  والتي تمس  $AI$  عند  $I$  تلاقي الضلع  $AB$  في نقطة  $P$ . الدائرة المارة بالنقطة  $C$  والتي تمس  $AI$  عند  $I$  تلاقي الضلع  $AC$  في نقطة  $Q$ . أثبت أن  $PQ$  مماساً للدائرة الداخلية للمثلث  $ABC$ .

**السؤال الخامس:** ليكن  $n \geq 2$  عدداً صحيحاً، ولتكن  $a_1, a_2, \dots, a_n$  أعداداً صحيحة موجبة. أثبت أنه يوجد أعداداً صحيحة موجبة  $b_1, b_2, \dots, b_n$  تحقق الشروط التالية:

(i)  $a_i \leq b_i$  لكل  $i = 1, 2, \dots, n$ .

(ii) باقي قسمة كلاً من  $b_1, b_2, \dots, b_n$  على  $n$  هي أعداداً مختلفة منتهى منتهى.

$$(iii) \quad b_1 + b_2 + \dots + b_n \leq n \left( \frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$$

حيث  $\lfloor x \rfloor$  هو صحيح العدد  $x$ .

**السؤال السادس:** رسمت شادن 2019 وترّاً في دائرة. نقاط البداية والنهاية لهذه الأوتار مختلفة. نقول عن هذه النقاط أنّها "مُعَلِّمة" إذا كانت:

(i) أحد النقاط التي تقع على الدائرة والبالغ عددها 4038، أو

(ii) نقطة تقاطع وترين على الأقل داخل الدائرة.

بعد أن حددت شادن جميع النقاط التي تحمل صفة "مُعَلِّمة". من الفقرة (i) والتي عددها 4038 نقطة، رمزت شادن لعدد 2019 نقطة منها بالقيمة 0، وللنقاط الـ 2019 الأخرى بالقيمة 1. وكما جاء في الفقرة (ii) فقد وضعت لكل نقطة تقاطع قيمة لها تمثل عدداً صحيحاً و بشكل عشوائي ( ليس بالضرورة أن تكون موجبة).

والآن على كل وتر قامت شادن بالنظر على كل القطع المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين متتاليتين ذات صفة "مُعَلِّمة" (لاحظي أن الوتر الذي يحوي  $k$  من النقاط ذات صفة "مُعَلِّمة" يحوي عدداً من القطع المستقيمة عددها  $k - 1$  قطعة). حيث كتبت باللون الأصفر مجموع العددين الموجودين على نهايتي أي قطعة مستقيمة تصل بين نقطتين ذات صفة "مُعَلِّمة" على الوتر الواحد. وباللون الأزرق كتبت القيمة المطلقة للفرق بين نفس النقطتين.

إذا وجدت شادن أن الـ  $N + 1$  عدد ذات اللون الصفراء لها القيم  $0, 1, \dots, N$  (لاحظي عدم تكرار القيم).

أثبت أن أحد الأعداد الزرقاء من مضاعفات العدد 3.