Torek, 9. april 2019

Naloga 1. Poišči vse trojice takih realnih števil (a, b, c), da je $ab + bc + ca = 1$ in

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Naloga 2. Naj bo n naravno število. Domine so položene na tabelo velikosti $2n \times 2n$ tako, da je vsako polje sosednje natanko enemu polju pokritemu z domino. Za vsak n določi največje možno število domin, ki jih lahko položimo na ta način.

(*Domina* je ploščica velikosti 2×1 ali 1×2. Domine so položene na tabelo tako, da se ne prekrivajo in vsaka domina pokriva točno dve polji tabele. Dve polji sta *sosednji*, če sta različni in imata skupno stranico.)

Naloga 3. Naj bo ABC tak trikotnik, da je $\angle CAB > \angle ABC$ in naj bo I središče njemu včrtane krožnice. Naj bo D taka točka na daljici BC, da velja $\angle CAD = \angle ABC$. Naj bo ω krožnica, ki gre skozi I in je tangentna na AC v A. Naj bo X drugo presečišče ω in krožnice očrtane trikotniku ABC. Dokaži, da se simetrali kotov $\angle DAB$ in $\angle CXB$ sekata na premici BC.

Čas pisanja: 4 ure in 30 minut
Vsaka naloga je vredna 7 točk