Utorok, 9. apríla 2019

Úloha 1. Nájdite všetky trojice (a, b, c) reálnych čísel také, že platí $ab + bc + ca = 1$ a súčasne

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Úloha 2. Je dané kladné celé číslo n. Na štvorcovú tabuľku $2n \times 2n$ sú umiestnené dominá tak, že každé políčko tejto tabuľky je susedné s práve jedným políčkom pokrytým dominom. Pre každé n určte najväčší počet domín, ktoré môžeme takto umiestniť na túto tabuľku.

(*Dominom* rozumieme obdĺžnik 2×1 alebo 1×2. Dominá sú umiestňované na tabuľku tak, že každé domino pokrýva práve dve políčka tabuľky a jednotlivé dominá sa neprekrývajú. Dve políčka tabuľky sú *susedné*, práve keď sú rôzne a majú spoločnú stranu.)

Úloha 3. Je daný trojuholník ABC taký, že $|\angle CAB| > |\angle ABC|$. Označme I stred kružnice jemu vpísanej. Nech D je bod úsečky BC, pre ktorý platí $|\angle CAD| = |\angle ABC|$. Označme ω kružnicu, ktorá sa dotýka priamky AC v bode A a prechádza bodom I. Nech X $(X \neq A)$ je priesečník kružnice ω a kružnice opísanej trojuholníku ABC. Dokážte, že osi uhlov DAB a CXB sa pretínajú na priamke BC.

Čas: 4 hodiny a 30 minút
Každá úloha je hodnotená najviac 7 bodmi.