Terça-feira, 9 de abril de 2019

Problema 1. Encontre todas as triplas (a, b, c) de números reais tais que $ab + bc + ca = 1$ e

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Seja n um inteiro positivo. Dominós são colocados em um tabuleiro $2n \times 2n$ de forma que toda casa do tabuleiro é adjacente a exatamente uma casa coberta por um dominó. Para cada n, determine o maior número de dominós que podem ser colocados no tabuleiro dessa maneira.

(Um *dominó* é uma peça de tamanho 2×1 ou 1×2. Dominós são colocados no tabuleiro de maneira que cada dominó cobre exatamente 2 casas do tabuleiro, e dominós não podem se sobrepor. Duas casas do tabuleiro são chamadas *adjacentes* se elas são diferentes e têm um lado em comum.)

Problema 3. Seja ABC um triângulo tal que $\angle CAB > \angle ABC$, e seja I o seu incentro. Seja D o ponto do segmento BC tal que $\angle CAD = \angle ABC$. Seja ω a circunferência tangente a AC em A que também passa por I. Seja X o segundo ponto de interseção entre ω e o circuncírculo de ABC. Prove que as bissetrizes dos ângulos $\angle DAB$ e $\angle CXB$ se intersectam em um ponto na reta BC.

Tempo de prova: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos