wtorek, 9 kwietnia 2019 r.

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) takich liczb rzeczywistych, że $ab + bc + ca = 1$ oraz

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Zadanie 2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n. Na planszy o wymiarach $2n \times 2n$ umieszczamy płytki domino w taki sposób, że każde pole planszy sąsiaduje z dokładnie jednym polem przykrytym przez płytkę domino. Dla każdego n wyznaczyć największą możliwą liczbę płytek domino, które mogą być ułożone na planszy w ten sposób.

(*Płytką domino* nazywamy płytkę o wymiarach 2×1 lub 1×2. Płytki domino są umieszczane na planszy w taki sposób, że każda płytka przykrywa dokładnie dwa pola planszy oraz żadne dwie płytki nie przykrywają tego samego pola. Dwa pola *sąsiadują* ze sobą, jeśli są różne oraz mają wspólny bok.)

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\angle CAB > \angle ABC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia $\angle CAD = \angle ABC$. Okrąg ω jest styczny do prostej AC w punkcie A oraz przechodzi przez punkt I. Punkt X ($X \neq A$) jest drugim punktem przecięcia okręgu ω oraz okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wykazać, że dwusieczne kątów DAB oraz CXB przecinają się na prostej BC.

Czas pracy: 4 godziny i 30 minut
Za każde zadanie można otrzymać 7 punktów