Tirsdag 9. april 2019

Oppgave 1. Finn alle tripler (a, b, c) av reelle tall slik at $ab + bc + ca = 1$ og

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Oppgave 2. La n være et positivt heltall. Dominobrikker plaseres på et $2n \times 2n$ brett på en slik måte at hver rute er nabo til nøyaktig én rute som er dekket av en dominobrikke. For hver n, bestem det største antallet dominobrikker som kan plasseres på denne måten.

(En *dominobrikke* er en brikke på 2×1 eller 1×2 ruter. Dominobrikker plasseres på brettet slik at hver brikke dekker nøyaktig to ruter på brettet og slik at de ikke overlapper. To ruter er *naboer* hvis de er forskjellige og deler en kant.)

Oppgave 3. La ABC være en trekant med $\angle CAB > \angle ABC$ og med innsenter I. La D være punktet på linjestykket BC som tilfredsstiller $\angle CAD = \angle ABC$. La ω være sirkelen som tangerer AC i punktet A og som går gjennom punktet I. La X være det andre skjæringspunktet mellom ω og omsirkelen til ABC. Vis at vinkelhalveringslinjene til $\angle DAB$ og $\angle CXB$ møtes i et punkt på linjen BC.

Tid til rådighet: 4 timer og 30 minutter
Hver oppgave er verdt 7 poeng