2019 年 *4* 月 *9* 日 火曜日

問題 1. 実数の組 (a,b,c) であって，$ab+bc+ca=1$ と

$$a^2b+c=b^2c+a=c^2a+b$$

をともにみたすものをすべて求めよ．

問題 2. n を正の整数とする．$2n\times 2n$ のマス目にいくつかのドミノを次の条件をみたすように置く．

> どのマスについても，そのマスに隣接しているマスのうちちょうど 1 つがドミノに覆われている．

各 n に対して，置くことができるドミノの数としてありうる最大の値を求めよ．

ただし，ドミノとは 2×1 または 1×2 のタイルである．ドミノはちょうど 2 つのマスを覆うように置かなければならず，重ねて置くことはできない．また，2 つのマスが**隣接**しているとは，それらが異なりかつ辺を共有していることをいう．

問題 3. 三角形 ABC は $\angle CAB>\angle ABC$ をみたすとし，その内心を I とする．D を $\angle CAD=\angle ABC$ となるような線分 BC 上の点とする．点 I を通り，A において直線 AC に接する円を ω とする．ω と三角形 ABC の外接円の交点のうち，A でない方を X とする．このとき，$\angle DAB$ と $\angle CXB$ の二等分線は直線 BC 上で交わることを示せ．

時間：4 時間 30 分
各問 7 点