Martedì, 9 Aprile 2019

Problema 1. Determinare tutte le terne (a, b, c) di numeri reali tali che $ab + bc + ca = 1$ e

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Sia n un intero positivo. Delle tessere del domino sono sistemate su una tabella $2n \times 2n$ in maniera tale che ogni casella della tabella è adiacente ad esattamente una casella coperta da una tessera del domino.

Per ogni n, determinare il massimo numero di tessere del domino che possono essere sistemate in questo modo.

(Una *tessera del domino* è una tessera di dimensioni 2×1 o 1×2. Le tessere del domino sono disposte sulla tabella in maniera tale che ogni tessera del domino ricopre esattamente due caselle della tabella, e le tessere non si sovrappongono. Due caselle si dicono *adiacenti* se sono diverse e hanno un lato in comune.)

Problema 3. Sia ABC un triangolo tale che $\angle CAB > \angle ABC$, e sia I il suo incentro. Sia D il punto del segmento BC tale che $\angle CAD = \angle ABC$. Sia ω la circonferenza tangente ad AC in A, e passante per I. Sia X il secondo punto di intersezione tra ω e la circonferenza circoscritta ad ABC.

Dimostrare che le bisettrici di $\angle DAB$ e $\angle CXB$ si intersecano in un punto della retta BC.

Tempo concesso: 4 ore e 30 minuti
Ogni problema vale 7 punti