European Girls' Mathematical Olympiad
Kyiv, Ukraine 2019

Language: **Greek**

Day: **1**

Τρίτη, 9 Απριλίου, 2019

Πρόβλημα 1. Να βρεθούν όλες οι τριάδες (a, b, c) πραγματικών αριθμών τέτοιων ώστε $ab+bc+ca = 1$ και

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Πρόβλημα 2. Έστω n ένας θετικός ακέραιος. Τοποθετούνται ντόμινο σε ένα $2n \times 2n$ πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε κελί του πίνακα να είναι γειτονικό με ακριβώς ένα κελί το οποίο να καλύπτεται από ένα ντόμινο. Για κάθε n, να προσδιοριστεί το μέγιστο πλήθος των ντόμινο που μπορούν να τοποθετηθούν με αυτόν τον τρόπο.

(Ένα *ντόμινο* είναι ένα πλακίδιο διαστάσεων 2×1 ή 1×2. Τα ντόμινο τοποθετούνται στον πίνακα με τέτοιο τρόπο ώστε κάθε ντόμινο να καλύπτει ακριβώς δύο κελιά του πίνακα, και τα ντόμινο να μην αλληλοεπικαλύπτονται. Δύο κελιά ονομάζονται *γειτονικά* εάν είναι διαφορετικά και έχουν μία κοινή πλευρά).

Πρόβλημα 3. Έστω τρίγωνο ABC τέτοιο ώστε $\angle CAB > \angle ABC$, και έστω I το έγκεντρό του. Έστω D σημείο στο τμήμα BC τέτοιο ώστε $\angle CAD = \angle ABC$. Έστω ω ο κύκλος ο οποίος εφάπτεται της AC στο A και διέρχεται από το I. Έστω X το δεύτερο σημείο τομής του ω με τον περιγεγγραμμένο κύκλο του ABC. Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών $\angle DAB$ και $\angle CXB$ τέμνονται σε σημείο της ευθείας BC.