Вторник, 9 април 2019

Задача 1. Да се намерят всички тройки (a, b, c) от реални числа, за които $ab + bc + ca = 1$ и

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Задача 2. Нека n е естествено число. Дъска $2n \times 2n$ е покрита с домина така, че всяко поле на дъската е съседно на точно едно поле, покрито с домино. За всяко n, да се намери най-големият брой домина, които могат да бъдат поставени по този начин.

(Ще наричаме *домино* група от полета 2×1 или 1×2. Домина се слагат на дъската така, че всяко домино покрива точно две полета на дъската и никое две домина не се застъпват. Две полета се наричат *съседни*, ако са различни и имат обща страна.)

Задача 3. Даден е триъгълник ABC с ъгли $\angle CAB > \angle ABC$ и център на вписаната окръжност I. Точка D лежи на отсечката BC така, че $\angle CAD = \angle ABC$. Нека ω е окръжността, която се допира до AC в точка A и съдържа точка I. Нека X е втората пресечна точка на ω и описаната около триъгълник ABC окръжност. Да се докаже, че ъглополовящите на ъгли $\angle DAB$ и $\angle CXB$ се пресичат в точка от правата BC.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Всяка задача се оценява с до 7 точки