Вторник, 9 апреля 2019 г.

Задача 1. Найдите все тройки (a, b, c) вещественных чисел таких, что $ab + bc + ca = 1$ и

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Задача 2. Пусть n — положительное целое число. Доминошки расположены на доске $2n \times 2n$ так, что каждая клетка доски является соседней ровно для одной клетки, накрытой доминошкой. Для каждого n определите наибольшее количество доминошек, которое можно расположить таким образом.

(*Доминошка* — это плитка размера 2×1 или 1×2. Доминошки расположены на доске так, что каждая доминошка накрывает ровно две клетки доски и доминошки не перекрываются. Две клетки называются *соседними*, если они различные и имеют общую сторону.)

Задача 3. Пусть ABC — треугольник, в котором $\angle CAB > \angle ABC$, а I — центр его вписанной окружности. Пусть D — точка на отрезке BC такая, что $\angle CAD = \angle ABC$. Пусть ω — окружность, касающаяся AC в точке A и проходящая через I. Пусть X — вторая точка пересечения ω и описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что биссектрисы углов $\angle DAB$ и $\angle CXB$ пересекаются в точке, лежащей на прямой BC.

Время работы: 4 часа 30 минут
Каждая задача оценивается из 7 баллов