Marţi, 9 Aprilie, 2019

Problema 1. Determinaţi toate tripletele (a, b, c) de numere reale astfel încât $ab + bc + ac = 1$ şi

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problema 2. Fie n un întreg strict mai mare ca 0. Pe o tablă $2n \times 2n$ sunt aşezate dominouri astfel încât fiecare pătrăţel al tablei este vecin cu exact un pătrăţel acoperit de un domino. Determinaţi, pentru fiecare n, numărul maxim de dominouri care pot fi aşezate astfel.

(Un *domino* este o piesă 2×1 sau 1×2. Dominourile sunt aşezate pe tablă astfel încât fiecare domino acoperă exact două pătrăţele ale tablei. Două pătrăţele se numesc *vecine* dacă sunt distincte şi au o latură comună.)

Problema 3. Fie ABC un triunghi astfel încât $\angle CAB > \angle ABC$ şi fie I centrul cercului său înscris. Fie D punctul de pe segmentul BC pentru care $\angle CAD = \angle ABC$. Fie ω cercul care trece prin I şi este tangent la AC în A. Fie X al doilea punct de intersecţie al lui ω cu cercul circumscris triunghiului ABC. Demonstraţi că bisectoarele unghiurilor $\angle DAB$ şi $\angle CXB$ se intersectează într-un punct situat pe dreapta BC.

Timp: 4 ore şi 30 de minute
Fiecare problemă valorează 7 puncte