

wtorek, 9 kwietnia 2019 r.

Zadanie 1. Wyznaczyć wszystkie trójki (a, b, c) takich liczb rzeczywistych, że $ab + bc + ca = 1$ oraz

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Zadanie 2. Dana jest dodatnia liczba całkowita n . Na planszy o wymiarach $2n \times 2n$ umieszczamy płytki domino w taki sposób, że każde pole planszy sąsiaduje z dokładnie jednym polem przykrytym przez płytkę domino. Dla każdego n wyznaczyć największą możliwą liczbę płytek domino, które mogą być ułożone na planszy w ten sposób.

(Płytką domino nazywamy płytkę o wymiarach 2×1 lub 1×2 . Płytki domino są umieszczane na planszy w taki sposób, że każda płytkę przykrywa dokładnie dwa pola planszy oraz żadne dwie płytki nie przykrywają tego samego pola. Dwa pola sąsiadują ze sobą, jeśli są różne oraz mają wspólny bok.)

Zadanie 3. Dany jest trójkąt ABC , w którym $\angle CAB > \angle ABC$. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w ten trójkąt. Punkt D leży na odcinku BC i spełnia $\angle CAD = \angle ABC$. Okrąg ω jest styczny do prostej AC w punkcie A oraz przechodzi przez punkt I . Punkt X ($X \neq A$) jest drugim punktem przecięcia okręgu ω oraz okręgu opisanego na trójkącie ABC . Wykazać, że dwusieczne kątów DAB oraz CXB przecinają się na prostej BC .