

2019年4月9日 火曜日

問題 1. 実数の組 (a, b, c) であって, $ab + bc + ca = 1$ と

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b$$

をともにみたすものをすべて求めよ.

問題 2. n を正の整数とする. $2n \times 2n$ のマス目にいくつかのドミノを次の条件をみたすように置く.

どのマスについても, そのマスに隣接しているマスのうちちょうど1つがドミノに覆われている.

各 n に対して, 置くことができるドミノの数としてありうる最大の値を求めよ.

ただし, ドミノとは 2×1 または 1×2 のタイルである. ドミノはちょうど2つのマスを覆うように置かなければならず, 重ねて置くことはできない. また, 2つのマスが隣接しているとは, それらが異なりかつ辺を共有していることをいう.

問題 3. 三角形 ABC は $\angle CAB > \angle ABC$ をみたすとし, その内心を I とする. D を $\angle CAD = \angle ABC$ となるような線分 BC 上の点とする. 点 I を通り, A において直線 AC に接する円を ω とする. ω と三角形 ABC の外接円の交点のうち, A でない方を X とする. このとき, $\angle DAB$ と $\angle CXB$ の二等分線は直線 BC 上で交わることを示せ.