Language: **French**

Day: **1**

Mardi 9 avril 2019

Problème 1. Déterminer tous les triplets de réels (a, b, c) tels que $ab + bc + ca = 1$ et

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Problème 2. Soit n un entier strictement positif. Des dominos sont disposés sur un échiquier $2n \times 2n$ de sorte que toute case soit adjacente à exactement une case recouverte par un domino. Pour chaque n, déterminer le plus grand nombre de dominos qui peuvent être disposés de cette manière.

(Un *domino* est une pièce 1×2 ou 2×1. Les dominos sont disposés sur l'échiquier de manière à ce que chaque domino couvre exactement deux cases et que deux dominos ne se recouvrent pas. Deux cases sont dites *adjacentes* si elles sont différentes et possèdent un côté commun.)

Problème 3. Soit ABC un triangle tel que $\widehat{CAB} > \widehat{ABC}$ et soit I le centre de son cercle inscrit. Soit D le point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$. Soit ω le cercle tangent à la droite (AC) en A et passant par I. Soit X le second point d'intersection de ω avec le cercle circonscrit à ABC. Démontrer que les bissectrices de $\widehat{DAB}$ et $\widehat{CXB}$ se coupent en un point de la droite (BC).

Durée: 4 heures et 30 minutes
Chaque problème vaut 7 points