Tiistaina 4. huhtikuuta 2019

Tehtävä 1. Määritä kaikki reaalilukukolmikot (a, b, c), jotka toteuttavat ehdot $ab + bc + ca = 1$ ja

$$a^2b + c = b^2c + a = c^2a + b.$$

Tehtävä 2. Olkoon n positiivinen kokonaisluku. $2n \times 2n$-laudalle asetetaan dominoita niin, että jokaisella laudan ruudulla on täsmälleen yksi vierekkäinen ruutu, joka on peitetty dominolla. Määritä kaikilla n suurin mahdollinen määrä dominoita, jotka voidaan asettaa näin laudalle.

(*Domino* on palikka, jonka koko on 2×1 tai 1×2. Dominot asetetaan laudalle niin, että jokainen domino peittää täsmälleen kaksi laudan ruutua ja dominot eivät mene päällekkäin. Kaksi ruutua ovat vierekkäisiä, jos ne ovat eri ruutu ja niillä on yhteinen sivu.)

Tehtävä 3. Olkoon ABC kolmio, jolla $\angle CAB > \angle ABC$ ja olkoon I sen sisäänpiirretyn ympyrän keskipiste. Olkoon D sellainen piste janalla BC, jolla $\angle CAD = \angle ABC$. Olkoon ω se ympyrä, joka sivuaa suoraa AC pisteessä A ja kulkee pisteen I kautta. Olkoon X ympyrän ω ja kolmion ABC ympäripiirretyn ympyrän toinen leikkauspiste. Osoita, että kulmien $\angle DAB$ ja $\angle CXB$ puolittajat leikkaavat pisteessä, joka on suoralla BC.

Aikaa 4 tuntia ja 30 minuuttia
Jokainen tehtävä on 7 pisteen arvoinen